

**Τμήμα Μηχανικών  
Πληροφορικής**  
ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης



**Γραφικά Υπολογιστών**  
**ΣΤ' Εξάμηνο**

Δρ Κωνσταντίνος Δεμερτζής



ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Γραφικά Υπολογιστών

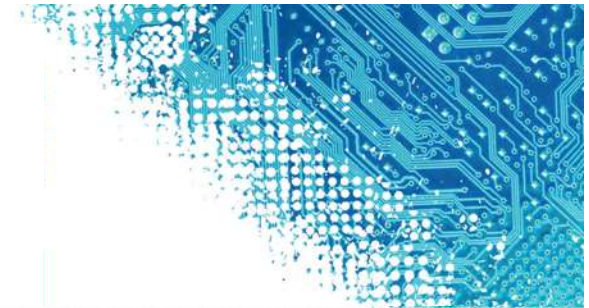
# 3<sup>η</sup> Ενότητα

Προαπαιτούμενα για  
Γραφικά Υπολογιστών





## Γραφικά Υπολογιστών



SOCIAL PROFILES [a](#) [in](#) [RG](#) [g+](#)



### Konstantinos Demertzis

BSc, MSc, PhD

Research Assistant at the Department of Forestry and Management of the Environment and Natural Resources (Lab of Forest-Environmental Informatics and Computational Intelligence) at the Democritus University of Thrace

Name	Demertzis Konstantinos
Date of birth	October 13, 1975
Address	Orestiada, Greece
Email	kdemertz@fmenr.duth.gr
Skype	live:kdwesax
Website	utopia.duth.gr/kdemertz



Profile



Resume



PhD



Publications



Portfolio



Contact

*"Ignorance is the curse of God, knowledge is the wing wherewith we fly to heaven..."*

*William Shakespeare, Henry VI (1591)*



ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Γραφικά Υπολογιστών



**[kdemertz@fmenr.duth.gr](mailto:kdemertz@fmenr.duth.gr)**



ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

# Αξιολόγηση Μαθήματος

Τρόποι αξιολόγησης						
Γραπτή Εξέταση 70%	Τελική γραπτή εξέταση στην ύλη του μαθήματος					
Εργασία 30%	Προγραμματισμός			Σχεδίαση Μοντέλου		
	OpenGL	WebGL	Three.js	3ds Max	Maya	???
	HTML5	CSS3	Phaser			

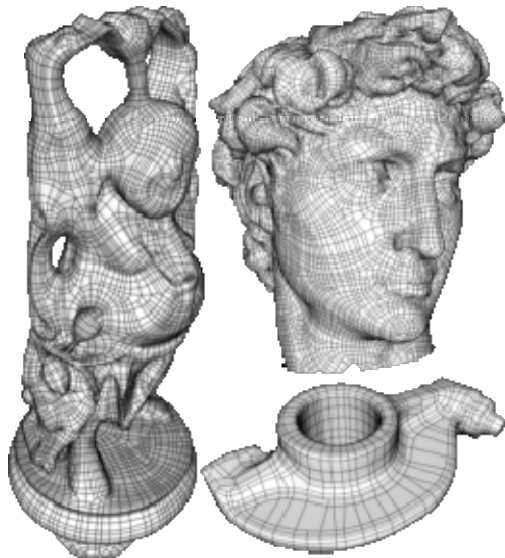


## Γραφικά Υπολογιστών

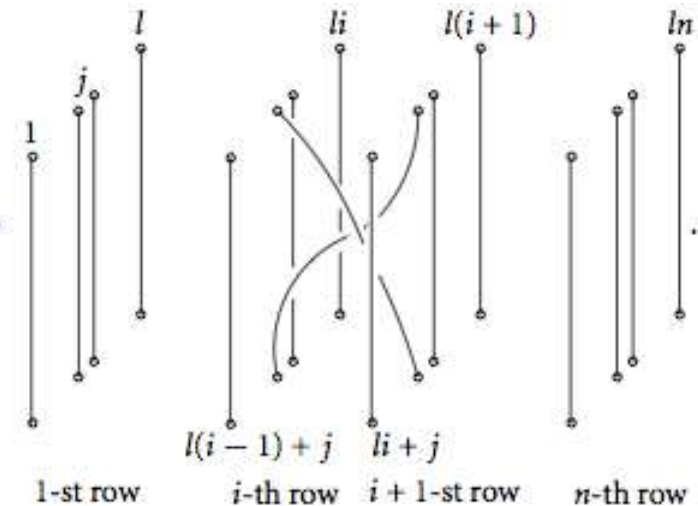


### Προαπαιτούμενα

- ✓ Η περιοχή των Γραφικών είναι ένα αντικείμενο αρκετά πολύπλοκο το οποίο χρησιμοποιεί μαθηματικές έννοιες, οι οποίες υλοποιούνται με προγράμματα σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού.
- ✓ Παράλληλα οι περισσότερες έννοιες που πραγματεύονται, όπως πχ ο φωτισμός και οι δυναμικές προσομοιώσεις έχουν άμεση σχέση με τους φυσικούς νόμους.



$$(1 \otimes \cdots \otimes \underset{j\text{-th position}}{\sigma_i} \otimes \cdots \otimes 1) \mapsto$$



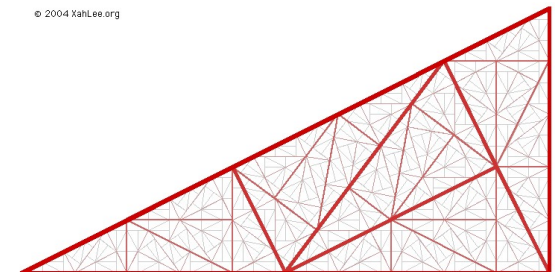
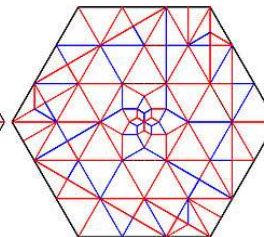
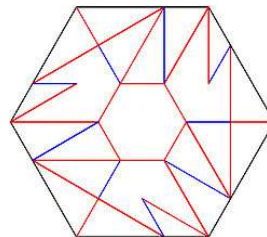


## Γραφικά Υπολογιστών



### Προαπαιτούμενα

- ✓ Για να είναι εφικτή η εστιασμένη παρουσίαση, των σημαντικότερων στοιχείων ενός συστήματος γραφικών απαιτείται η γνώση των παρακάτω αντικειμένων:
  - ✓ **Γραμμική Άλγεβρα – Μαθηματικά**
    - ✓ Ένα εικονικό περιβάλλον απαρτίζεται από γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία αναπαρίστανται σε έναν τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο.
    - ✓ Τα αντικείμενα αυτά περιγράφονται ως σύνολα σημείων (διανυσμάτων) ή συνηθέστερα ως σύνολα στοιχειωδών γεωμετρικών οντοτήτων, όπως είναι τα τρίγωνα, τα οποία όμως και πάλι είναι τριάδες σημείων.
    - ✓ Οποιαδήποτε κίνηση του αντικειμένου ή του σημείου παρατήρησης περιγράφεται από τους κατάλληλους μετασχηματισμούς, οι οποίοι εν γένει ανάγονται σε πολλαπλασιασμούς πινάκων.
    - ✓ Η γραμμική άλγεβρα είναι το σημαντικότερο προαπαιτούμενο στα γραφικά υπολογιστών.





## Γραφικά Υπολογιστών

### Προαπαιτούμενα

- ✓ Για να είναι εφικτή η εστιασμένη παρουσίαση, των σημαντικότερων στοιχείων ενός συστήματος γραφικών απαιτείται η γνώση των παρακάτω αντικειμένων:
  - ✓ **Προγραμματισμός**
    - ✓ Η υλοποίηση ενός συστήματος Γραφικών γίνεται γράφοντας ένα πρόγραμμα σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού.
    - ✓ Απαιτούνται οι βασικές γνώσεις κάποιας γλώσσας προγραμματισμού.
    - ✓ Κάποια παραδείγματα δίνονται σε μορφή ψευδοκώδικα και κάποιες φορές δίνεται και κώδικας συνήθως σε γλώσσα C.
    - ✓ Η γνώση προγραμματισμού είναι ένα σημαντικό προαπαιτούμενο.

**C/C++**

```
initgraph();
```

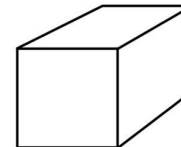
```
circle(20, 20, 30);
```

```
bar3d();
```

**Graphics**

```
outtextxy(0, 0, "C/C++");
```

```
line();
```



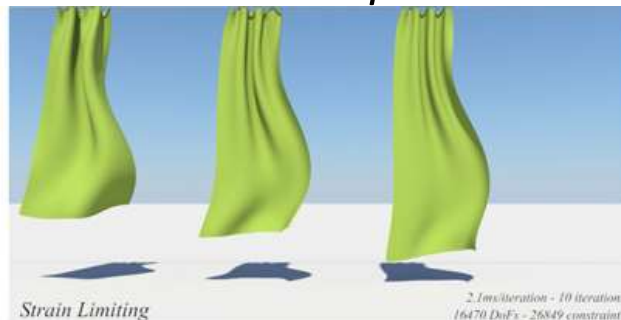




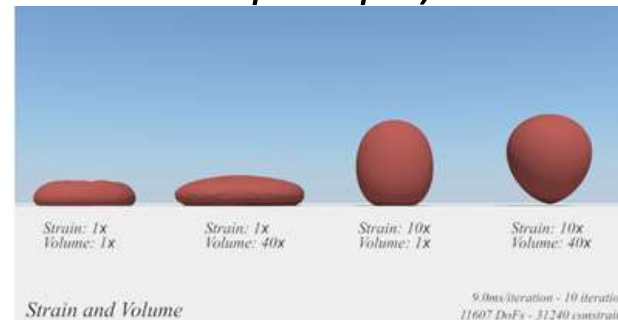
## Γραφικά Υπολογιστών

### Προαπαιτούμενα

- ✓ Για να είναι εφικτή η εστιασμένη παρουσίαση, των σημαντικότερων στοιχείων ενός συστήματος γραφικών απαιτείται η γνώση των παρακάτω αντικειμένων:
  - ✓ **Φυσική**
    - ✓ Οι γνώσεις φυσικής είναι επιθυμητές, διότι πολλά από τα συστήματα Γραφικών είναι εμπνευσμένα από φυσικές διεργασίες.
    - ✓ Έτσι οι αλγόριθμοι φωτισμού βασίζονται στην κλασική αλληλεπίδραση φωτός και ύλης την οποία «προσπαθούν» να μιμηθούν.
    - ✓ Ακόμα οι δυναμικές προσομοιώσεις έχουν ως στόχο την αλγοριθμική υλοποίηση των νόμων της κλασικής Νευτώνιας μηχανικής.
    - ✓ Δε είναι απαραίτητη η εις βάθος γνώση φυσικής (μόνο μια ανασκόπηση των βασικών νόμων όπου αυτό είναι απαραίτητο).



Cloths



Solids



## Γραφικά Υπολογιστών



### Γενικά

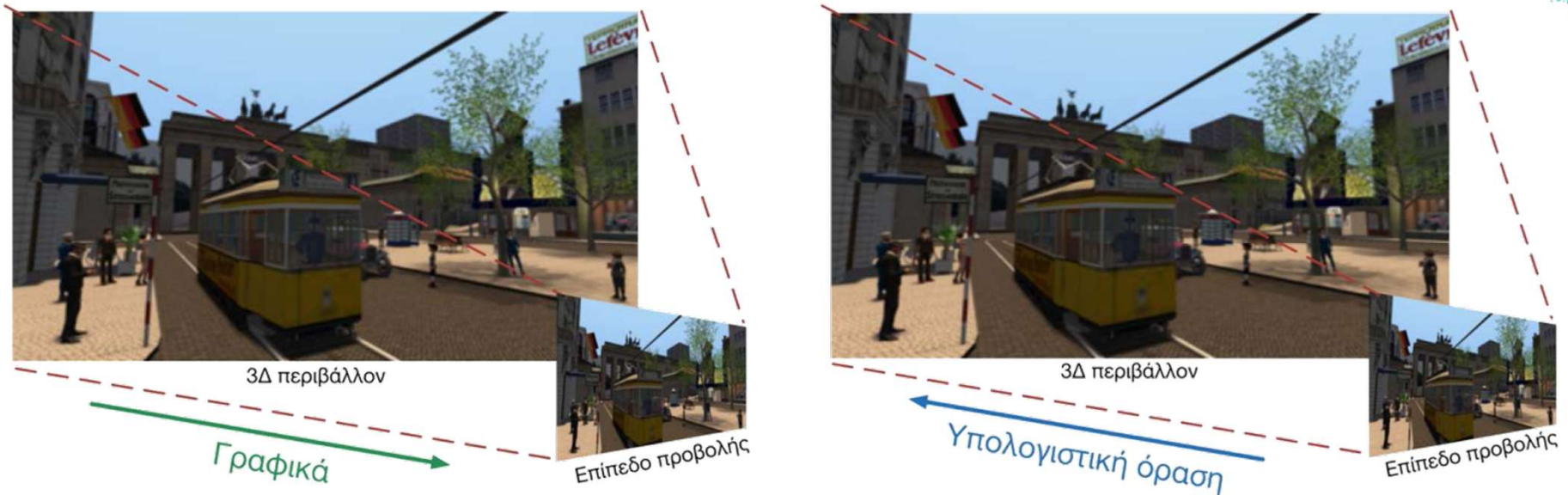
- ✓ Τα Γραφικά είναι η επιστήμη που ασχολείται με όλα τα ζητήματα που σχετίζονται με την οπτική επικοινωνία ανθρώπου και μηχανής. Συνήθως, η επικοινωνία αυτή περιορίζεται στη σύνθεση εικόνων μέσω ενός υπολογιστή τις οποίες παρατηρεί ένας χρήστης. Δεν είναι λίγες όμως και οι εφαρμογές κατά τις οποίες και ο υπολογιστής «παρακολουθεί» και αναγνωρίζει τις κινήσεις του χρήστη.
- ✓ Ένα πρακτικό παράδειγμα
  - ✓ Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες σχέσεις είναι αυτή της επιστημονικής περιοχής των Γραφικών και της Υπολογιστικής Όρασης (Computer Vision).
  - ✓ Σε ένα σύστημα γραφικών είναι γνωστά όλα τα αντικείμενα και οι παράμετροι του τρισδιάστατου κόσμου. Αυτό που ζητείται είναι η απεικόνισή τους σε ένα επίπεδο προβολής 2D το οποίο αναπαριστά και το «παράθυρο» του χρήστη προς τον εικονικό κόσμο.
  - ✓ Στην Υπολογιστική Όραση αυτό που δίνεται είναι μία εικόνα, ή μία ακολουθία εικόνων 2D από την οποία ζητείται ο υπολογισμός δεδομένων και χαρακτηριστικών των αντικειμένων και του κόσμου τριών διαστάσεων όπως είναι το βάθος, η γεωμετρία των αντικειμένων, η κίνησή τους, κ.ά.



## Γραφικά Υπολογιστών

### Γενικά

- ✓ Ένα πρακτικό παράδειγμα



Στα Γραφικά (αριστερά) είναι γνωστό το μοντέλο ενός τρισδιάστατου περιβάλλοντος και προσπαθούμε να σχεδιάσουμε ρεαλιστικά και αποδοτικά την εικόνα στο επίπεδο προβολής. Στην Υπολογιστική Όραση (δεξιά) μας δίνεται μια εικόνα ενός περιβάλλοντος και προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητές του.

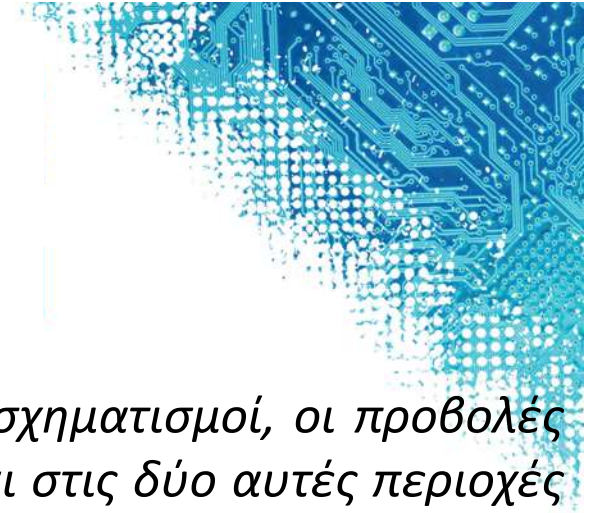
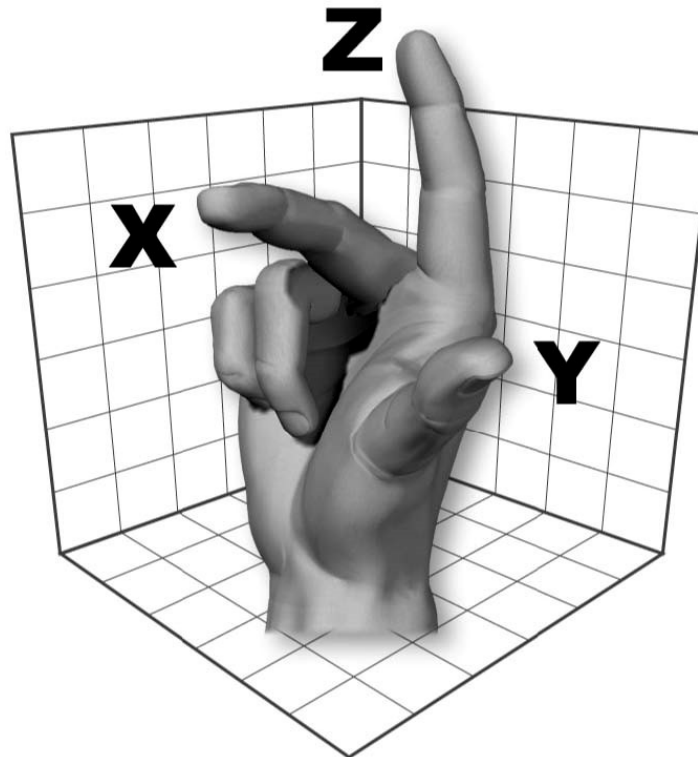


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Γενικά

- ✓ Για το λόγο αυτό οι θεμελιώδεις έννοιες, όπως οι μετασχηματισμοί, οι προβολές αλλά και οι χρωματικές αναπαραστάσεις, είναι κοινές και στις δύο αυτές περιοχές οι οποίες διαφοροποιούνται στον τρόπο με τον οποίο κάνουν χρήση των μαθηματικών αυτών εργαλείων.

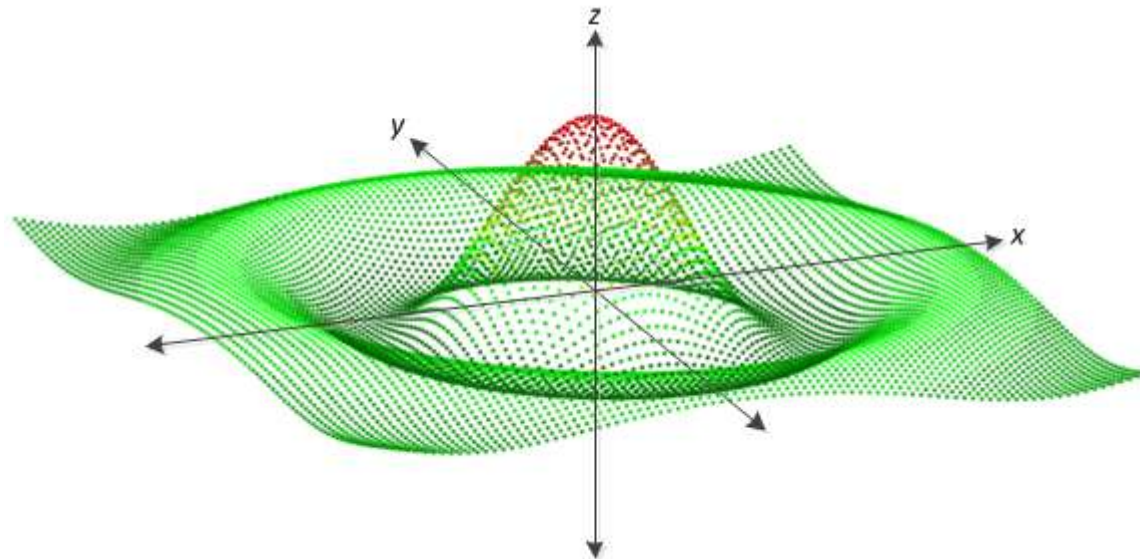




## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ *Η σκηνή μας είναι ένα δωμάτιο, στη μέση του οποίου βρίσκεται ένα τραπέζι. Πάνω στο τραπέζι βρίσκεται μια τσαγιέρα, ενώ στο δωμάτιο περιφέρεται ένας εικονικός χαρακτήρας. Ακριβώς πάνω από το τραπέζι υπάρχει μια λάμπα, η οποία φωτίζει τη σκηνή.*
- ✓ *Ένα σύνολο από υπολογιστικά προβλήματα τα οποία πρέπει να αντιμετωπίσουμε και σχετίζονται με το δοθέν πρόβλημα, αποτελούν την ύλη του μαθήματος.*



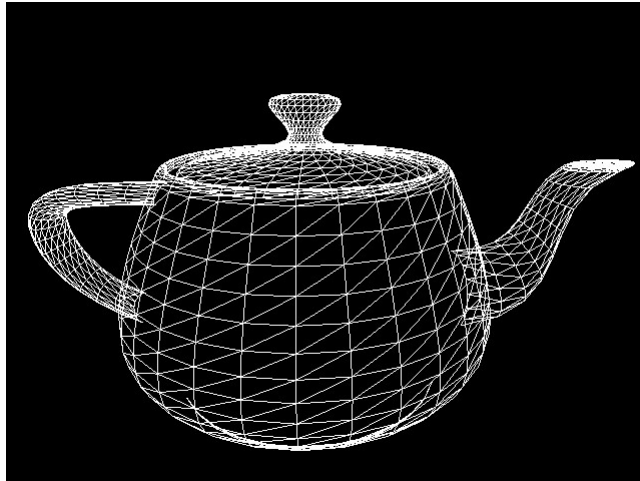


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ *Τι είναι ένα εικονικό αντικείμενο και πώς αναπαρίσταται;*
  - ✓ Ένα εικονικό αντικείμενο είναι συνήθως ένα σύνολο σημείων, τα οποία είναι κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους, ώστε να σχηματίζουν ένα σύνολο τριγώνων τα οποία απαρτίζουν την επιφάνεια του αντικειμένου.

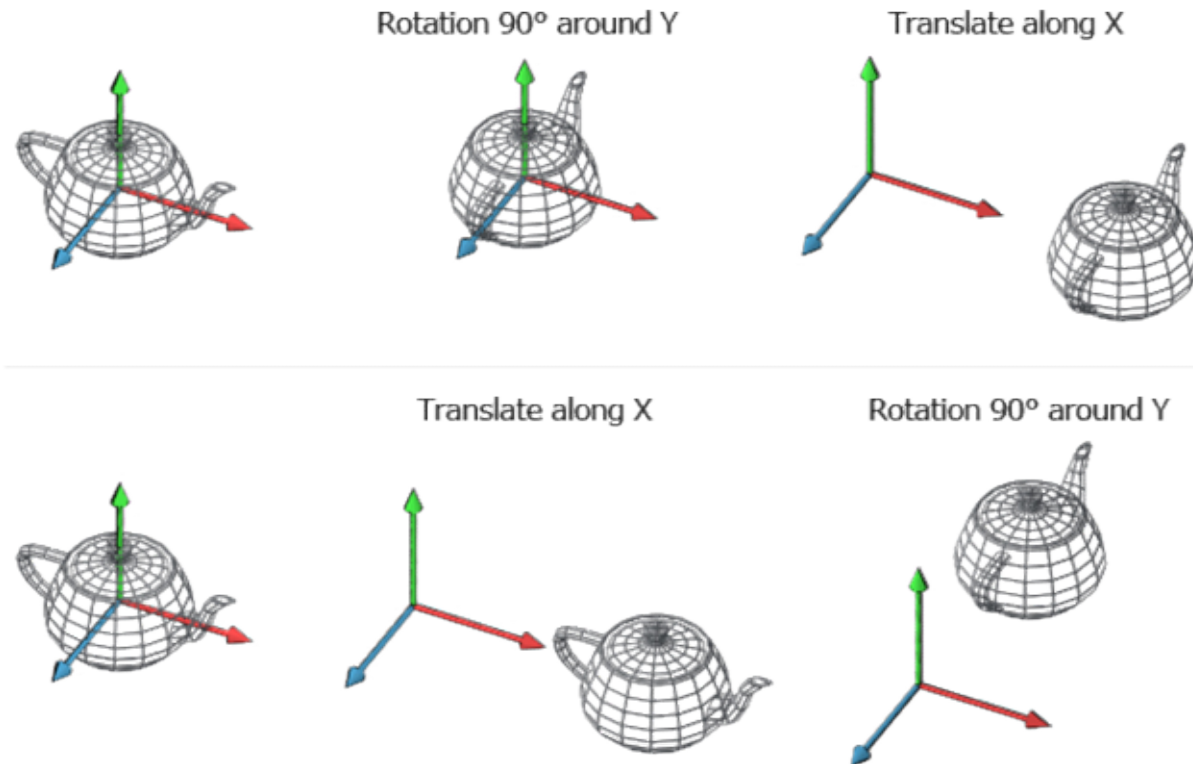




## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ Πώς ορίζεται η σχετική θέση των αντικειμένων στο χώρο;
  - ✓ Τα αντικείμενα είναι συνήθως, κεντραρισμένα στο τοπικό τους σύστημα συντεταγμένων και τα οποία τοποθετούνται στο σύστημα συντεταγμένων κόσμου με τη χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών.

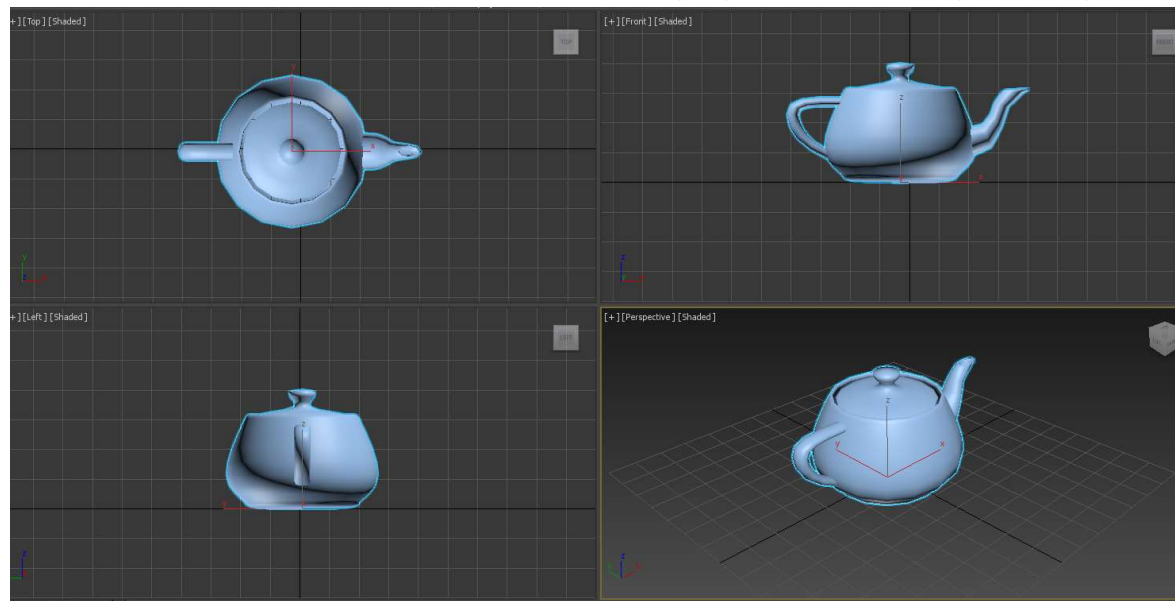




## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ Από ποιο σημείο κοιτάμε εμείς τον κόσμο και πώς προκύπτει η δύο διαστάσεων εικόνα που βλέπουμε;
  - ✓ Σε κάποιο σημείο του εικονικού κόσμου τοποθετείται μια εικονική κάμερα, η οποία προσομοιώνει τη θέση του ματιού μας. Μπορούμε να κινήσουμε την κάμερα αυτή με τη χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών, ώστε να περιηγηθούμε στο χώρο. Η προβολή του κόσμου τριών διαστάσεων σε μια εικόνα δύο διαστάσεων γίνεται επίσης με κατάλληλους μετασχηματισμούς.





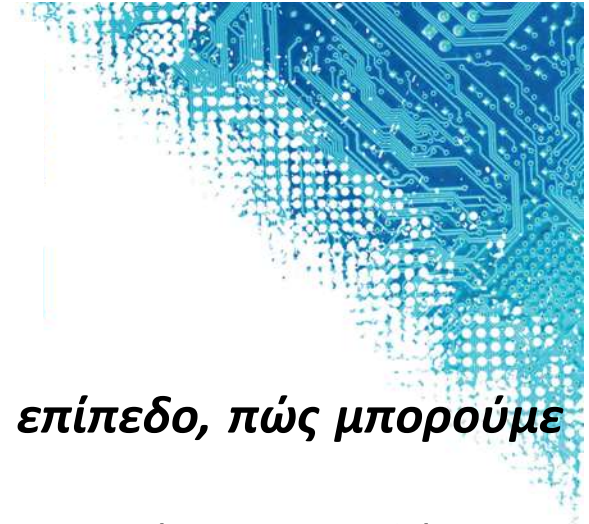
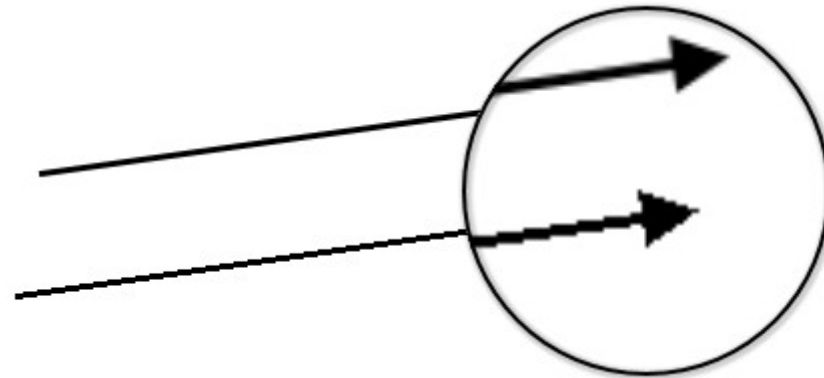


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ *Αν υποθέσουμε ότι έχουμε προβάλει μια καμπύλη στο επίπεδο, πώς μπορούμε να την σχεδιάσουμε στην εικόνα της οθόνης.*
  - ✓ *Αυτή η διαδικασία που είναι θεμελιώδης στα Γραφικά, προϋποθέτει τη μετάβαση από ένα συνεχή χώρο σε ένα διακριτό (εικονοστοιχεία της εικόνας) και την αντιμετώπιση ιδιαιτεροτήτων, όπως και του χειρισμού προβλημάτων, όπως πχ της ταύτισης (aliasing).*

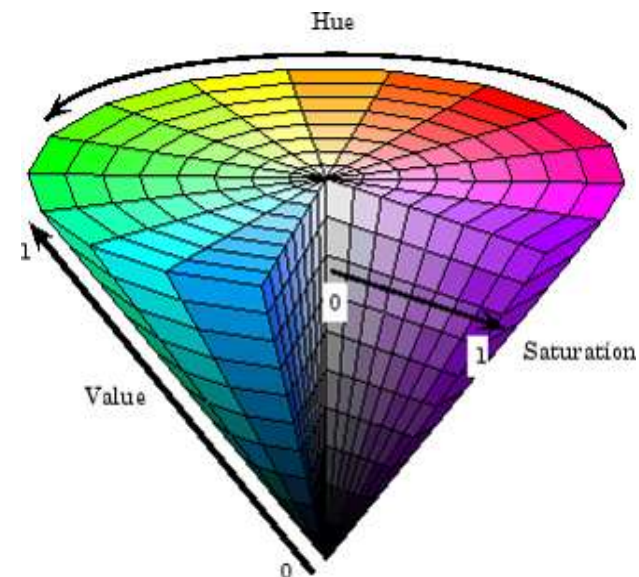
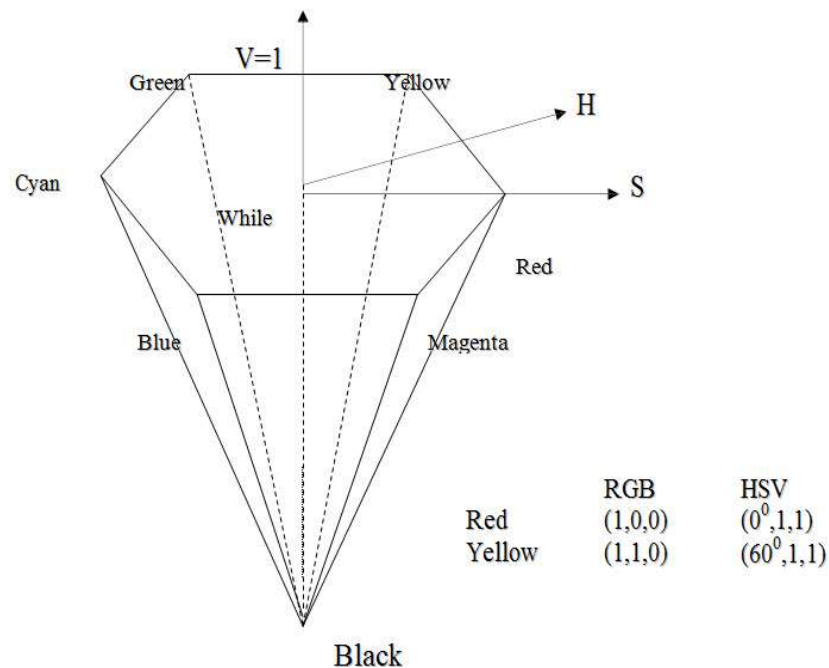




## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ Πώς μπορούμε να χρωματίσουμε τα αντικείμενα;
  - ✓ Η αναπαράσταση χρώματος και κυρίως η απόδοση υφής, αποτελούν σημαντική διαδικασία στα Γραφικά Υπολογιστών.

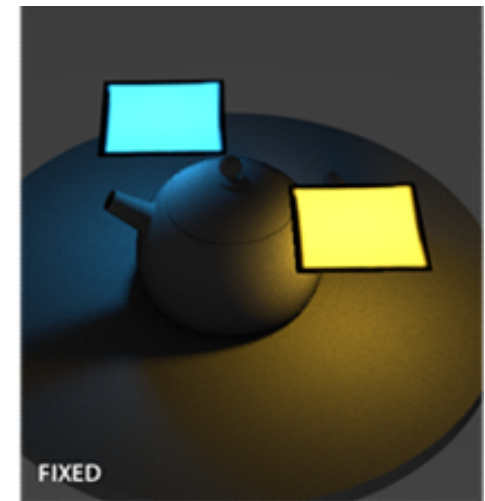
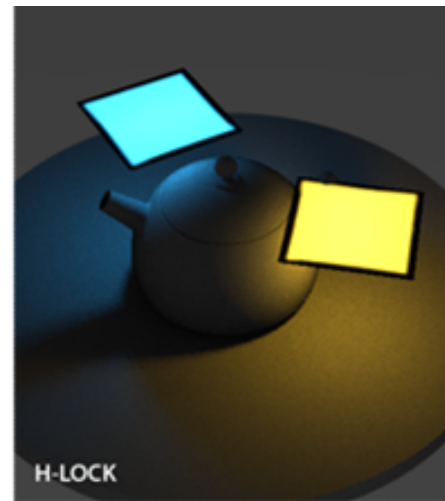
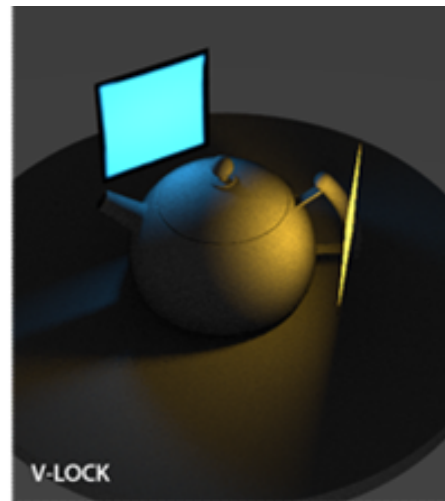
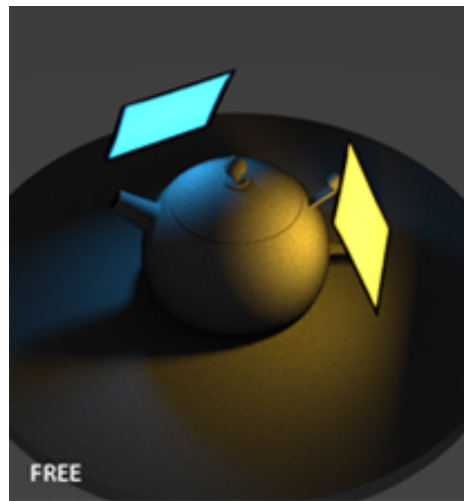




## Γραφικά Υπολογιστών

### Παράδειγμα ενός προβλήματος Γραφικών

- ✓ Πώς θα επηρεαστεί η εμφάνιση της τσαγιέρας αν αλλάξουμε τις ιδιότητες της λάμπας και πώς μεταδίδεται το φως στο περιβάλλον;
  - ✓ Ο φωτισμός είναι μια από τις σημαντικότερες διεργασίες στα συστήματα Γραφικών, όπου περιγράφονται διάφοροι τύποι φωτιστικών σωμάτων, μοντέλα φωτισμού, αλγόριθμοι φωτοσκίασης, αλλά και ιδιότητες του υλικού των αντικειμένων, όπως η ανακλαστικότητα, κτλ.





## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

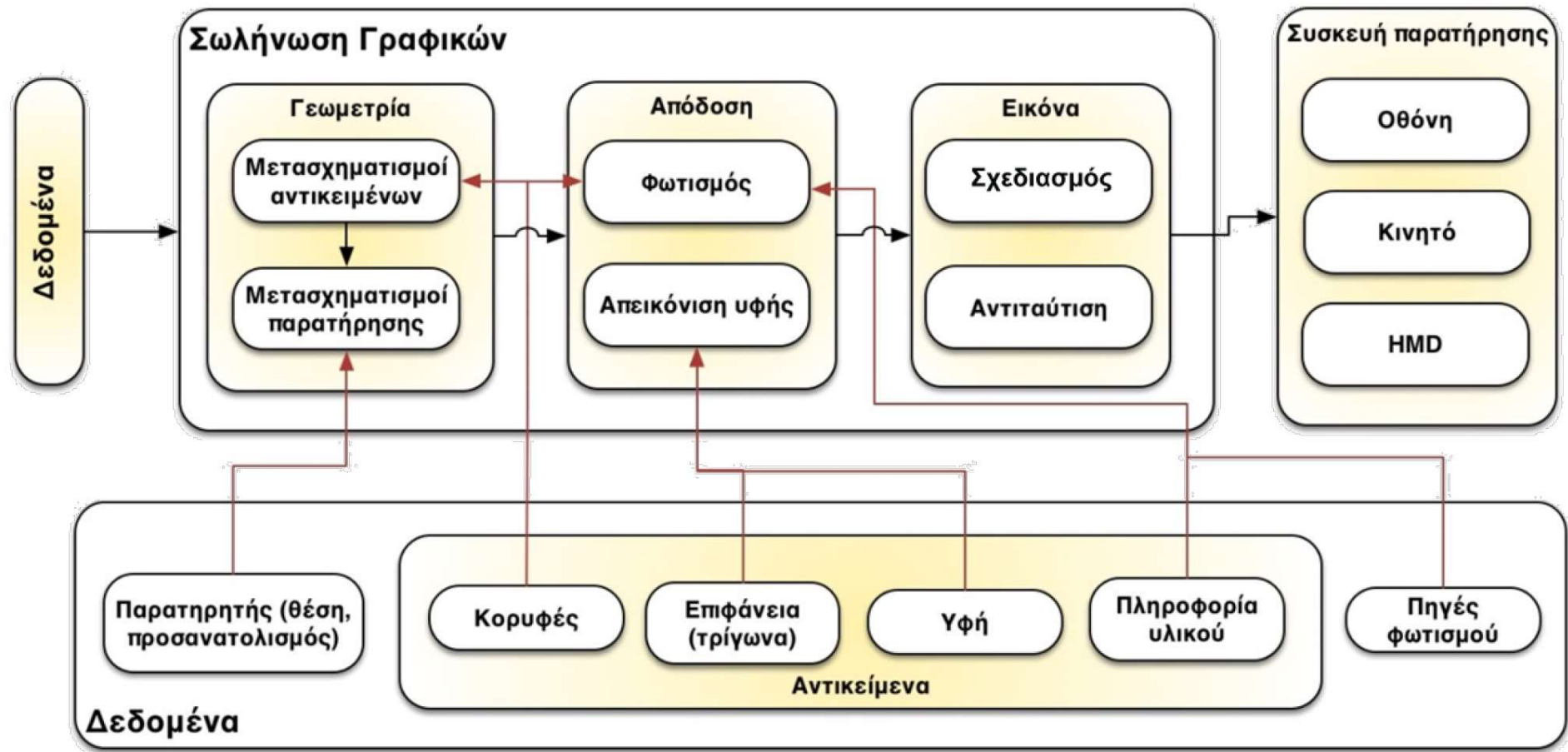
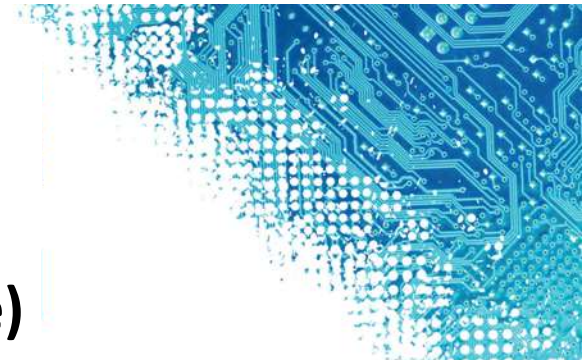
- ✓ Ο όρος σωλήνωση γραφικών χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η επεξεργασία των δεδομένων, προκειμένου να σχεδιαστεί μία σκηνή.
- ✓ Στην πιο αφηρημένη μορφή, ένα σύστημα γραφικών μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «μαύρο κουτί», το οποίο δέχεται ως είσοδο κάποια δεδομένα και παράγει στην έξοδό του μια εικόνα.
- ✓ Πρακτικά, στα συστήματα γραφικών όλα τα στοιχειώδη αντικείμενα μιας σκηνής υπόκεινται σε επεξεργασία ακολουθιακά από διάφορα υποσυστήματα.
- ✓ Ένας από τους λόγους για τους οποίους χρησιμοποιείται μια τέτοιου τύπου αρχιτεκτονική είναι η παράλληλη λειτουργία όλων των υποσυστημάτων.
- ✓ Έτσι, όταν ένα υποσύστημα ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός στοιχειώδους αντικειμένου προωθεί το αποτέλεσμα στο επόμενο υποσύστημα, ενώ ταυτόχρονα ξεκινά την επεξεργασία του επόμενου στοιχειώδους αντικειμένου.





## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)



Τα μαύρα βέλη ιχνηλατούν τους αλγορίθμους της σωλήνωσης γραφικών, ενώ τα κόκκινα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν ποια δεδομένα αποτελούν είσοδο σε ποια διαδικασία.



## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Δεδομένα

- ✓ Η κυριότερη, ίσως, μορφή δεδομένων σε ένα σύστημα γραφικών είναι το γεωμετρικό αντικείμενο.
- ✓ Ένα αντικείμενο αποτελείται συνήθως από κορυφές οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους σχηματίζοντας τρίγωνα ή και άλλες εναλλακτικές μορφές αναπαράστασης αντικειμένων.
- ✓ Πέρα από τη γεωμετρική αναπαράσταση, ένα αντικείμενο, συνήθως, συνοδεύεται από χάρτες υφής, οι οποίοι περιγράφουν την κατανομή του χρώματος πάνω στην επιφάνεια του αντικειμένου και από πληροφορία σχετικά με το είδος του υλικού, η οποία έχει συχνά να κάνει με την ανακλαστικότητα του αντικειμένου.
- ✓ Επίσης, απαραίτητη πληροφορία για ένα σύστημα γραφικών είναι και οι πηγές φωτός της σκηνής αλλά και η θέση και ο προσανατολισμός του παρατηρητή.





## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

- ✓ Τα γεωμετρικά μοντέλα μοντελοποιούνται σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο διευκολύνει τους υπολογισμούς.
- ✓ Πχ το τοπικό σύστημα συντεταγμένων μιας σφαίρας είναι κεντραρισμένο στο κέντρο της και οι τρεις ορθογώνιοι άξονες επιλέγονται τυχαία. Για την περίπτωση ενός κύβου, συνήθως, επιλέγεται ως αρχή των αξόνων το κέντρο βάρους του και οι άξονες ευθυγραμμίζονται με τις πλευρές του.
- ✓ Στη συνέχεια το μοντέλο τοποθετείται στο σύστημα συντεταγμένων κόσμου. Στην πράξη αυτό που γίνεται είναι να οριστεί ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός που να μεταφέρει το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στη συγκεκριμένη θέση του κόσμου (μεταφορά) και να το προσανατολίζει επιθυμητά (περιστροφή). Όλα τα αντικείμενα που περιγράφονται πλέον στο σύστημα συντεταγμένων κόσμου πρέπει να μετασχηματιστούν ως προς το σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή, κάτι το οποίο εμπλέκει ένα νέο 3D γεωμετρικό μετασχηματισμό όμοιο με το μετασχηματισμό του τοπικού συστήματος συντεταγμένων σε σύστημα συντεταγμένων κόσμου.



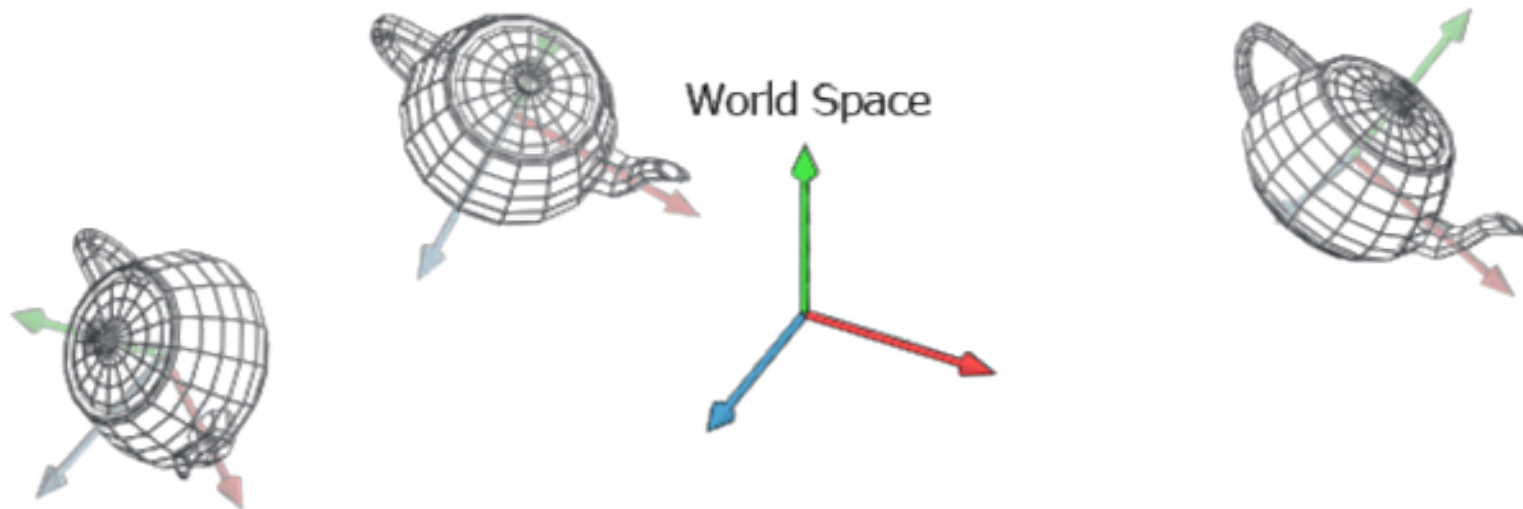


## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

- ✓ Στη συνέχεια πρέπει όλη η τρισδιάστατη πληροφορία των αντικειμένων να προβληθεί πάνω στο επίπεδο προβολής (viewport), το οποίο στη συνέχεια θα «αντιγράψουμε» στην οθόνη μας.
- ✓ Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται μετασχηματισμοί προβολής και έχουν θεμελιώδη σημασία στα Γραφικά, διότι συμμετέχουν σχεδόν σε όλες τις διαδικασίες ενός Συστήματος Γραφικών, από τη σχεδίαση, έως την υφή και την απόδοση κίνησης.







## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Χρώμα - Απεικόνιση υφής

- ✓ Η γεωμετρική αναπαράσταση ενός αντικειμένου είναι ένα σύνολο σημείων, τα οποία είναι κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους, ώστε να σχηματίζουν τρίγωνα. Άρα ως δεδομένα έχουμε Σημεία και Τρίγωνα.
- ✓ Εάν θέλουμε να χρωματίσουμε τα αντικείμενά μας, το μόνο που μπορούμε αρχικά να κάνουμε είναι να ορίσουμε ένα χρώμα για κάθε τρίγωνο του αντικειμένου.
- ✓ Έχοντας ως είσοδο μια εικόνα, ορίζεται ένας νέος μετασχηματισμός ο οποίος προβάλλει τις κορυφές έστω ενός τριγώνου πάνω στην εικόνα αυτή. Στη συνέχεια με μια διαδικασία που ονομάζεται απεικόνιση υφής, «κόβουμε» το τρίγωνο της εικόνας που σχηματίζεται από τα τρία αυτά σημεία και το χρησιμοποιούμε για να χρωματίσουμε το αντίστοιχο τρίγωνο του 3D αντικειμένου.
- ✓ Έτσι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποδώσουμε διάφορα πρότυπα και μοτίβα χρωμάτων πάνω στο αντικείμενό μας.





## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Φωτισμός

- ✓ Έστω ότι έχουμε τη γεωμετρική αναπαράσταση ενός αντικειμένου μαζί με τους εμπλεκόμενους μετασχηματισμούς, πάνω στο οποίο έχει εφαρμοστεί απεικόνιση υφής. Είναι σαφές και προφανές ότι ανάλογα με το φωτισμό της σκηνής το είδωλο του αντικειμένου πάνω στο επίπεδο προβολής θα είναι διαφορετικό. Η αρχική μας υπόθεση είναι ότι τα αντικείμενα αντανακλούν, ή διαθλούν, ή απορροφούν το φως, είτε συνδυάζουν τα παραπάνω σε κάποιο ποσοστό το καθένα. Ακόμα ο αέρας ούτε αντανακλά (σκέδαση) ούτε απορροφά φως. Στη συνέχεια καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο αντανακλά μια επιφάνεια το φως. Πιο συγκεκριμένα το φως μπορεί να αντανακλάται μόνο σε μια κατεύθυνση (καθρέφτης) είτε να διαχέεται προς όλες τις κατευθύνσεις (ματ επιφάνειες). Όλες οι παραπάνω παράμετροι κωδικοποιούνται στο μοντέλο φωτισμού Phong.
- ✓ Παρά το γεγονός, όμως, ότι το μοντέλο Phong χρησιμοποιείται ευρύτατα, δεν παύει να είναι μια χαμηλού υπολογιστικού κόστους προσέγγιση του τρόπου με τον οποίο αλληλεπιδρά το φως με την ύλη.





ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Σχεδιασμός

- ✓ Το τελευταίο στοιχείο της σωλήνωσης γραφικών μπορεί να θεωρηθεί ο σχεδιασμός των γεωμετρικών στοιχείων και καμπυλών μιας σκηνής.
- ✓ Εδώ το σημαντικότερο πρόβλημα είναι το πώς μπορεί κανείς να απεικονίσει συνεχείς καμπύλες (ευθύγραμμα τμήματα, τόξα, τρίγωνα) σε ένα πλέγμα πεπερασμένου αριθμού σημείων (εικονοστοιχεία).
- ✓ Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που συνεπάγεται η διακριτοποίηση αυτή χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές όπως η αντιταύτιση (anti-aliasing).





## Γραφικά Υπολογιστών

### Σωλήνωση γραφικών (computer graphics pipeline)

#### ✓ Συσσκευές παρατήρησης

- ✓ Παραδοσιακά οι συσκευές παρατήρησης σε ένα σύστημα γραφικών θεωρούνται οι προσωπικοί υπολογιστές και κατ' επέκταση οι οθόνες τους.
- ✓ Ενώ η τεχνολογία κατασκευής οθονών εξελίσσεται ραγδαία παραμένει αναλλοίωτος έως σήμερα ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση της πληροφορίας με χρήση εικονοστοιχείων, τα οποία μπορούν να πάρουν ένα συγκεκριμένο χρώμα.
- ✓ Με τη ραγδαία, αύξηση της ισχύος των φορητών υπολογιστικών μηχανών, ως συσκευές παρατήρησης συστημάτων γραφικών λογίζονται πλέον και όλες οι φορητές συσκευές συμπεριλαμβανομένων των κινητών τηλεφώνων.
- ✓ Ακόμα, πολύπλοκες συσκευές παρατήρησης εικονικής και επαυξημένης πραγματικότητας που είχαν απαγορευτικό κόστος, πλέον είναι προσιτές στο ευρύ κοινό και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.





## Γραφικά Υπολογιστών



### Σχεδίαση

- ✓ Στον τομέα των γραφικών, υπάρχει από τη μια μεριά η μαθηματική περιγραφή των σχημάτων που έχει την ανάλογη αυστηρότητα και από την άλλη οι περιορισμοί της πλεγματικής οθόνης πάνω στην οποία τελικά θα γίνει η σχεδίαση. Η οθόνη συμμετέχει στο πρόβλημα της σχεδίασης ως καμβάς πάνω στον οποίο θα σχηματιστούν οι μορφές κάθε σκηνής.
- ✓ Από πρακτικής πλευράς, η οθόνη προσεγγίζεται με έναν ορθογωνικό πίνακα εικονοστοιχείων πάνω στον οποίο οι αλγόριθμοι σχεδίασης εξάγουν τα αποτελέσματά τους με γνώμονα την προσεγγιστική ακρίβεια και την αποδοτικότητα.
- ✓ Από την πλευρά της πρακτικής χρήσης οι αλγόριθμοι σχεδίασης, στα σύγχρονα συστήματα γραφικών και τα διαθέσιμα προγραμματιστικά εργαλεία, είναι ήδη υλοποιημένοι και προσφέρουν έτοιμες συναρτήσεις σχεδιασμού.
- ✓ Το αντικείμενο της αλγοριθμικής της σχεδίασης προσεγγίζεται για ακαδημαϊκούς λόγους, ενώ η γνώση που προκύπτει θεωρείται προθάλαμος για πιο πολύπλοκες διαδικασίες της γραφικής με υπολογιστές.



## Γραφικά Υπολογιστών



### Το πρόβλημα της Σχεδίασης

- ✓ Οι οθόνες είναι δισδιάστατες επιφάνειες πάνω στις οποίες προβάλλεται η οπτική πληροφορία. Έχουν πεπερασμένες διαστάσεις και συγκεκριμένες τεχνικές προδιαγραφές (π.χ. μέγιστη ανάλυση). Έτσι, λοιπόν, μοιάζουν σαν ένα πλέγμα από *pixels* με το καθένα να είναι χρωματικά ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.
- ✓ Το πρόβλημα της σχεδίασης ξεκινάει από την ανάγκη να αναπαρασταθούν σχήματα στις πλεγματικές οθόνες λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ένα υπολογιστικό σύστημα δεν έχει όλους τους πόρους και τις δυνατότητες που θα θέλαμε για να αναπαραστήσει ένα ευθύγραμμο τμήμα, έναν κύκλο ή μια ελεύθερη καμπύλη.
- ✓ Η προβληματική της σχεδίασης αναφέρεται στην επιλογή ενός υποσυνόλου από τα διαθέσιμα εικονοστοιχεία της οθόνης τα οποία σε κάθε στιγμή (καρέ) θα πρέπει να επιλεγούν, ώστε να αποδοθεί σε αυτά ένας διαφορετικός χρωματισμός από τα άλλα εικονοστοιχεία που αναπαριστούν το υπόβαθρο.
- ✓ Στην πιο απλή μορφή συναντάται σε ένα περιβάλλον μονοχρωματικής απεικόνισης σχημάτων όπου το υπόβαθρο είναι λευκού χρώματος, ενώ στα εικονοστοιχεία που ανήκουν στο απεικονιζόμενο σχήμα αποδίδεται το μαύρο χρώμα.



## Γραφικά Υπολογιστών

### Το πρόβλημα της Σχεδίασης

- ✓ Το ανθρώπινο οπτικό σύστημα χρειάζεται έναν μεγάλο αριθμό από εικονοστοιχεία για να αντιληφθεί μια εικόνα με ενιαίο τρόπο.
- ✓ Η ανάλυση της οθόνης φτάνει σήμερα στα επίπεδα της υψηλής και πολύ υψηλής ανάλυσης (HD) και ένα πλήθος εικονοστοιχείων 1920 στο πλάτος επί 1080 στο ύψος θεωρείται συνηθισμένο για ένα μέτριο υπολογιστικό σύστημα γραφείου.
- ✓ Επίσης, τα εικονοστοιχεία δεν είναι πάντοτε τετραγωνικά, αλλά χαρακτηρίζονται από το λόγο διάστασης που εκφράζει το κατά πόσο πλησιάζει το σχήμα του ένα κανονικό τετράγωνο.
- ✓ Πχ, ένας λόγος 1.2:1, δηλώνει ότι το πλάτος του εικονοστοιχείου είναι 1.2 φορές πιο μεγάλο από το ύψος του.



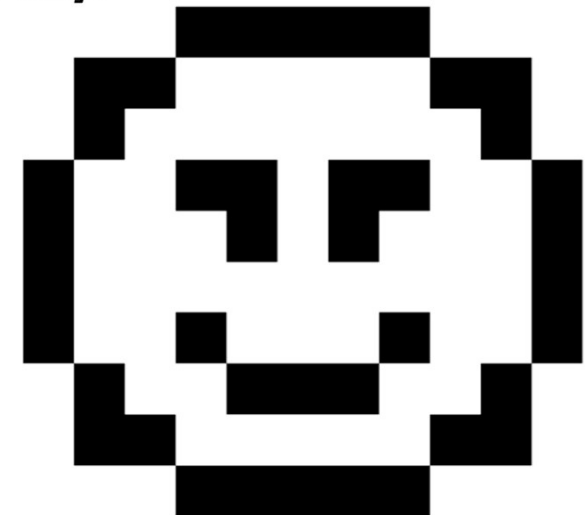


## Γραφικά Υπολογιστών

### Το πρόβλημα της Σχεδίασης

- ✓ Στην Εικόνα απεικονίζεται ένα παράδειγμα μονοχρωματικής εικόνας σε άσπρο-μαύρο και ο αντίστοιχος πίνακας με τις τιμές των εικονοστοιχείων της. Επειδή το βάθος χρώματος της εικόνας είναι 1, οι πιθανές τιμές που προκύπτουν για το χρώμα είναι 0 ή 1. Το 0, συνήθως, αντιστοιχεί στο λευκό το οποίο εδώ εξυπηρετεί ως χρώμα υποβάθρου, ενώ το 1 αντιστοιχεί στο μαύρο το οποίο χρησιμοποιείται ως χρώμα για τα περιγράμματα των σχημάτων, αλλά και ως χρώμα γεμίσματος. Σε μια εικόνα που αποδίδεται σε κλίμακα του γκρι, στον πίνακα *bitmap* εισάγονται τιμές χρώματος 8 bit που κυμαίνονται στο διάστημα  $[0, 255]$ .

0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0







## Γραφικά Υπολογιστών

### Το πρόβλημα της Σχεδίασης

- ✓ Ένα δεύτερο μεγάλο θέμα που απασχολεί τη σχεδίαση στον υπολογιστή είναι η αντιστοίχιση των μαθηματικά ορισμένων σημείων πάνω στην οθόνη, με δεδομένο ότι τα εικονοστοιχεία έχουν κάποιο σεβαστό μέγεθος.
- ✓ Στη θέση της οθόνης θεωρούμε ένα δισδιάστατο ορθογωνικό πλέγμα τετραγωνικών εικονοστοιχείων, το κέντρο των οποίων μπορεί να είναι είτε πάνω στις **ακέραιες συντεταγμένες** είτε **πάνω σε ημίσειες συντεταγμένες**.
- ✓ Στην πρώτη περίπτωση, το κάτω αριστερά εικονοστοιχείο (που συχνά θεωρείται το 'μηδενικό' εικονοστοιχείο καθώς βρίσκεται κοντά στο κέντρο των ημιαξόνων που ορίζουν το δισδιάστατο χώρο), έχει συντεταγμένες  $[0, 0]$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχει συντεταγμένες  $[0.5, 0.5]$ .
- ✓ Σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς που θεωρεί αντεστραμμένο τον άξονα των  $Y$ , το μηδενικό εικονοστοιχείο βρίσκεται πάνω αριστερά, όπως συμβαίνει συχνά σε περιβάλλοντα ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας.

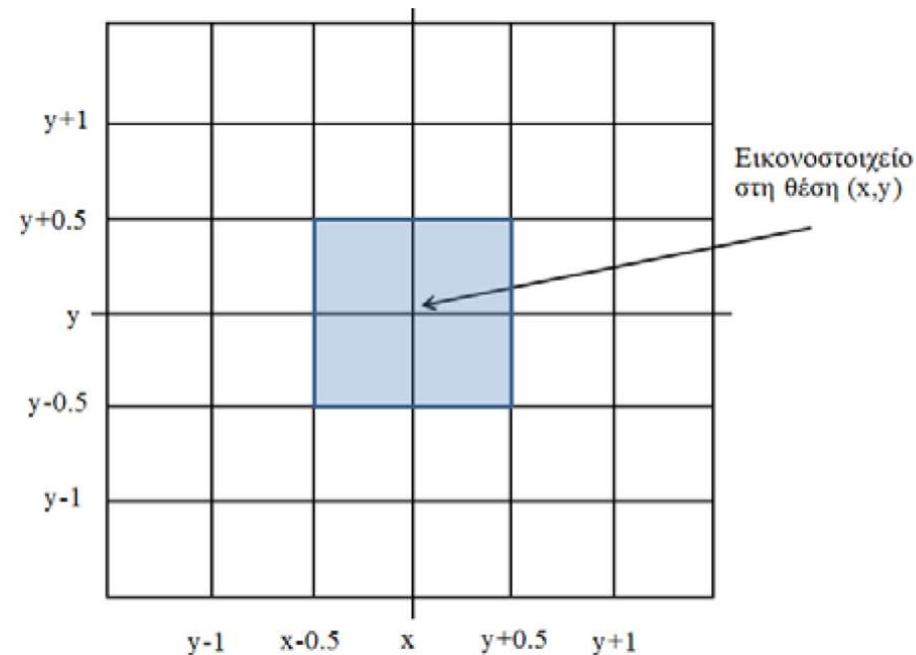




## Γραφικά Υπολογιστών

### Το πρόβλημα της Σχεδίασης

- ✓ Για λόγους απλότητας, θα θεωρείται ότι τα εικονοστοιχεία έχουν ακέραιες συντεταγμένες στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $(xOy)$  και ότι κάθε εικονοστοιχείο καλύπτει επιφάνεια από  $(x-0.5, y-0.5)$  έως  $(x+0.5, y+0.5)$  όπως φαίνεται στην Εικόνα.



Πλεγματική οθόνη όπου τα εικονοστοιχεία έχουν ακέραιες συντεταγμένες



## Γραφικά Υπολογιστών

### Το πρόβλημα της Σχεδίασης

- ✓ Οι ποιοτικοί παράγοντες που χαρακτηρίζουν κάθε λύση του προβλήματος της σχεδίασης είναι η ακρίβεια και η απόδοση.
- ✓ Ουσιαστικά, αυτό που καθιστά μια μέθοδο ή έναν αλγόριθμο σχεδίασης προτιμητέο από κάποιον άλλον είναι:
  - ✓ η δυνατότητα σχεδίασης όσο το δυνατόν πιο κοντά στην πραγματικότητα (στην ελάχιστη δυνατή απόσταση από την μαθηματικά ορισμένη πραγματικότητα),
  - ✓ η ταχύτητα σχεδίασης (αποδοτικότητα) και
  - ✓ η ελαχιστοποίηση της κατανάλωσης πόρων (π.χ. μνήμη RAM).
- ✓ Σε ένα βιντεοπαιχνίδι για παράδειγμα, είναι επιθυμητό η σχεδίαση πολύπλοκων σκηνών που αποτελούνται από πολλά σχήματα και χρώματα, να γίνεται σε πραγματικό χρόνο που σημαίνει τουλάχιστον 25 με 30 fps (frames per second).





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Σημεία και διανύσματα
  - ✓ Ένα σημείο αντιστοιχεί σε μία θέση στον τριδιάστατο χώρο.
  - ✓ Ένα διάνυσμα αντιπροσωπεύει μία ποσότητα που έχει κατεύθυνση και μέγεθος.
  - ✓ Η κατεύθυνση εμπεριέχει τη διεύθυνση και τη φορά, ενώ στον τυπικό μαθηματικό ορισμό, η ποσότητα του μεγέθους καλείται μέτρο του διανύσματος.
  - ✓ Για παράδειγμα, στη μετακίνηση καταγράφουμε τόσο το πόσο μετακινήθηκε το αντικείμενο (μέτρο) όσο και την κατεύθυνση προς την οποία έγινε η μετακίνηση.
  - ✓ Για ένα διάνυσμα αυτού του είδους δεν έχει σημασία το σημείο από το οποίο ξεκινάει (σημείο εφαρμογής) και έτσι καλείται ελεύθερο.
  - ✓ Μεταξύ σημείων, η μόνη πράξη που έχει νόημα είναι η αφαίρεση δύο σημείων, η οποία έχει ως αποτέλεσμα το μεταξύ τους διάνυσμα. συγκεκριμένα  $p-q$  είναι το διάνυσμα από το  $q$  προς το  $p$

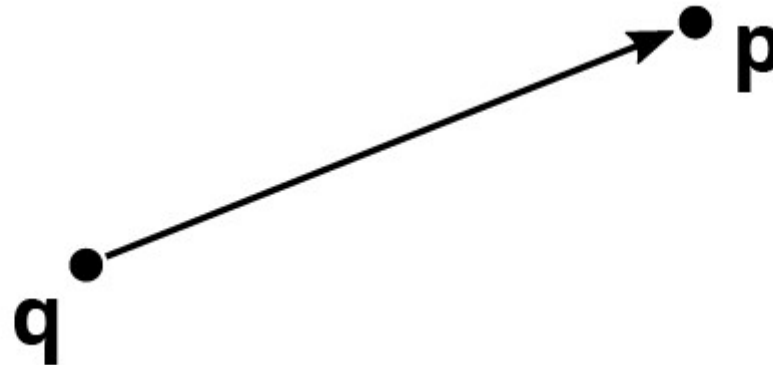




## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Σημεία και διανύσματα
  - ✓ Συγκεκριμένα  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  είναι το διάνυσμα από το  $q$  προς το  $p$



Διαφορά δύο σημείων

- ✓ Συχνά ένα σημείο  $\mathbf{p}$  ταυτίζεται με το διάνυσμα  $\mathbf{Op} = \mathbf{p} - \mathbf{O}$  όπου  $\mathbf{O}$  είναι η αρχή των αξόνων συντεταγμένων και αυτό διότι έχουν τις ίδιες συντεταγμένες.
- ✓ Έτσι μπορεί κανείς να δει πράξεις που κανονικά δεν έχουν νόημα, όπως για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός σημείου με αριθμό.



## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Ένα σύστημα συντεταγμένων μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε με τη βοήθεια αριθμητικών τιμών (των συντεταγμένων) τα σημεία και τα διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο και έτσι να κάνουμε αριθμητικές πράξεις με αυτά.
  - ✓ Ένα σημείο στον χώρο έχει τρεις συντεταγμένες σε οποιοδήποτε σύστημα και οι οποίες εκφράζονται ως προς το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων, το οποίο είναι ένα σημείο που επιλέγεται και έχει συντεταγμένες  $(0, 0, 0)$ .





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Καρτεσιανές συντεταγμένες
    - ✓ Οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι συνήθεις συντεταγμένες που χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε ένα σημείο.
    - ✓ Για να οριστεί ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων χρειάζεται ένα σημείο που ορίζεται ως το κέντρο του και συμβολίζεται με  $O$  καθώς και τρεις κάθετοι μεταξύ τους άξονες (προσανατολισμένες ευθείες)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  που διέρχονται από το  $O$ .
    - ✓ Οι συντεταγμένες ενός σημείου  $p$  ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, έστω  $(p_x, p_y, p_z)$  είναι τα μήκη των προβολών του σημείου στους τρεις άξονες· για να βρούμε, για παράδειγμα, την συντεταγμένη  $x$  δημιουργούμε ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από το  $p$  και είναι παράλληλο στο επίπεδο  $y_z$ , και το σημείο στο οποίο αυτό τέμνει τον άξονα  $x$  είναι η αντίστοιχη συντεταγμένη.



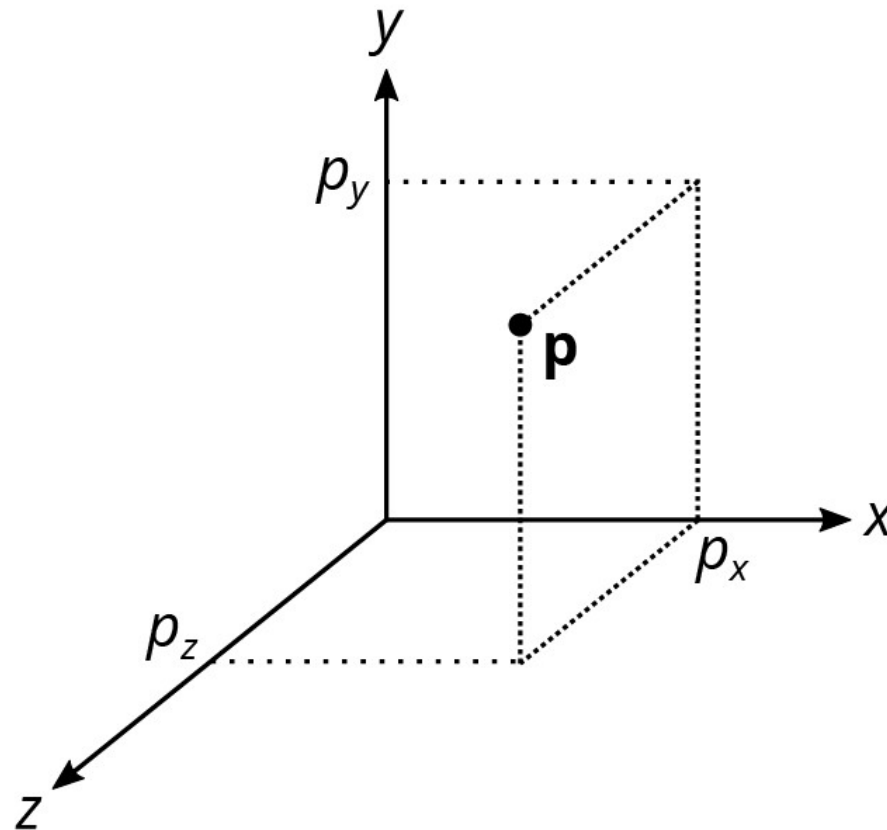


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Καρτεσιανές συντεταγμένες







## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Καρτεσιανές συντεταγμένες
    - ✓ Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι σημαντικός ο προσανατολισμός του.
    - ✓ Σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων η σχετική διάταξη των αξόνων ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού:
      - ✓ Οι άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  έχουν τον προσανατολισμό, αντίστοιχα, του αντίχειρα, του δείκτη και του μέσου του δεξιού χεριού.
      - ✓ Αντίθετα, σε ένα αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων ακολουθείται ανάλογα ο κανόνας του αριστερού χεριού.
    - ✓ Στις εφαρμογές Γραφικών χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση τόσο δεξιόστροφα όσο και αριστερόστροφα συστήματα συντεταγμένων.



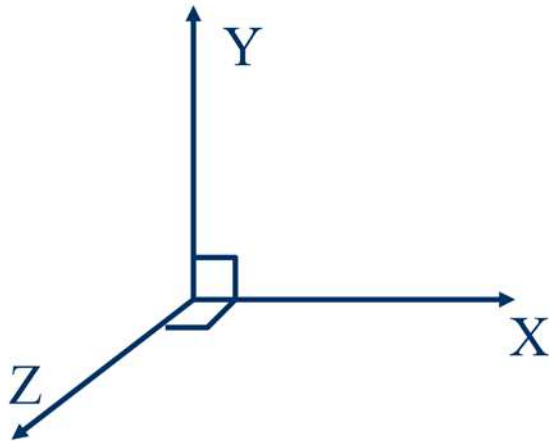


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

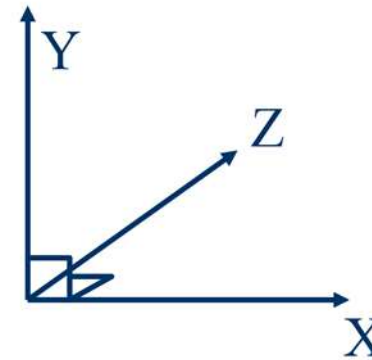
## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Καρτεσιανές συντεταγμένες



Δεξιόστροφο σύστημα  
(το Z έρχεται προς τα έξω)



**Αριστερόστροφο σύστημα**  
(το Z πάει προς τα μέσα)



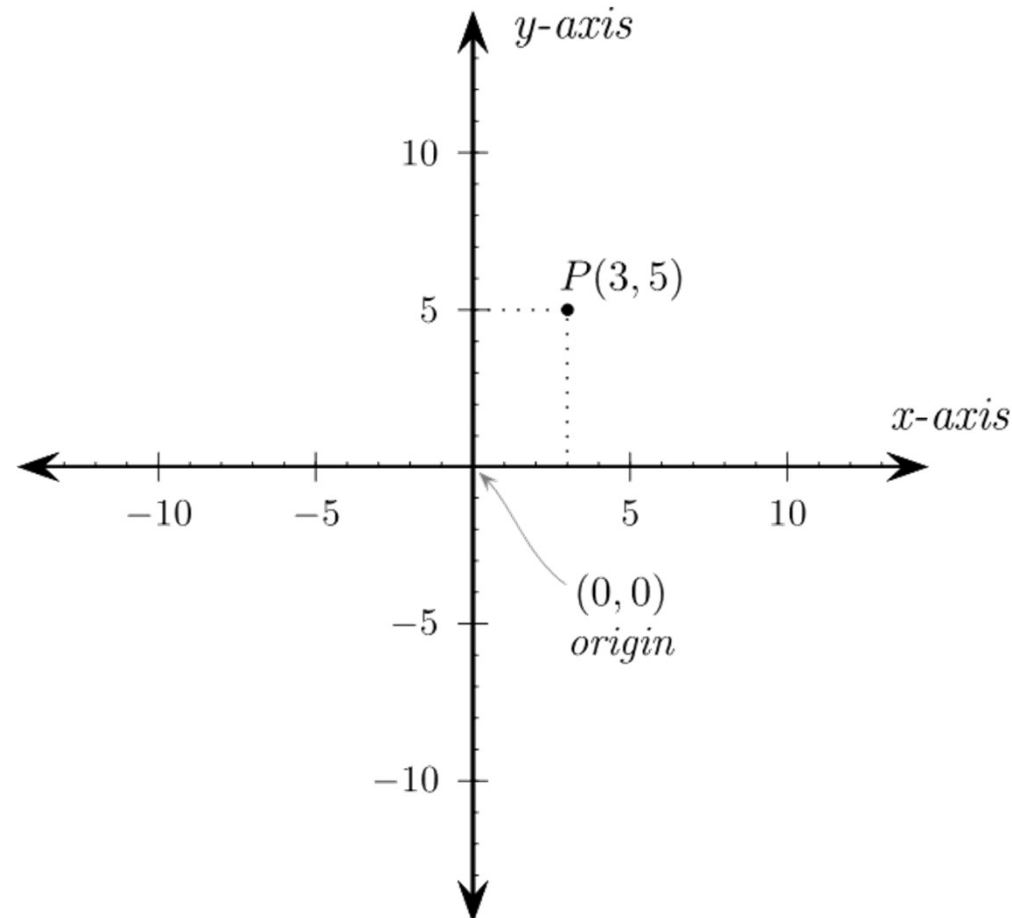


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Καρτεσιανές συντεταγμένες

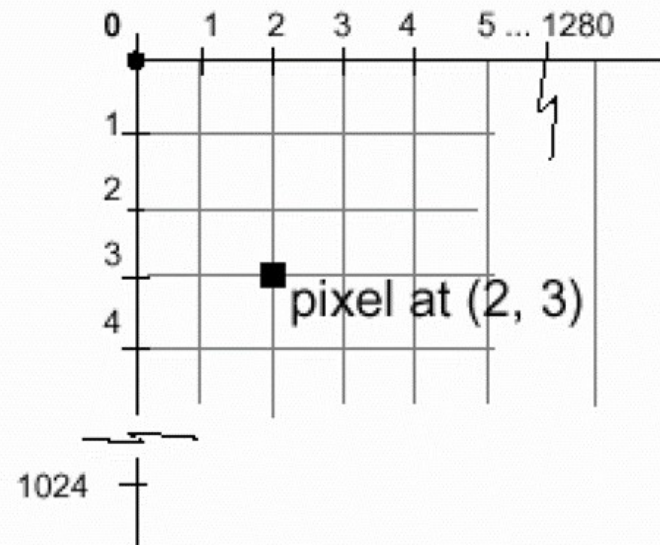
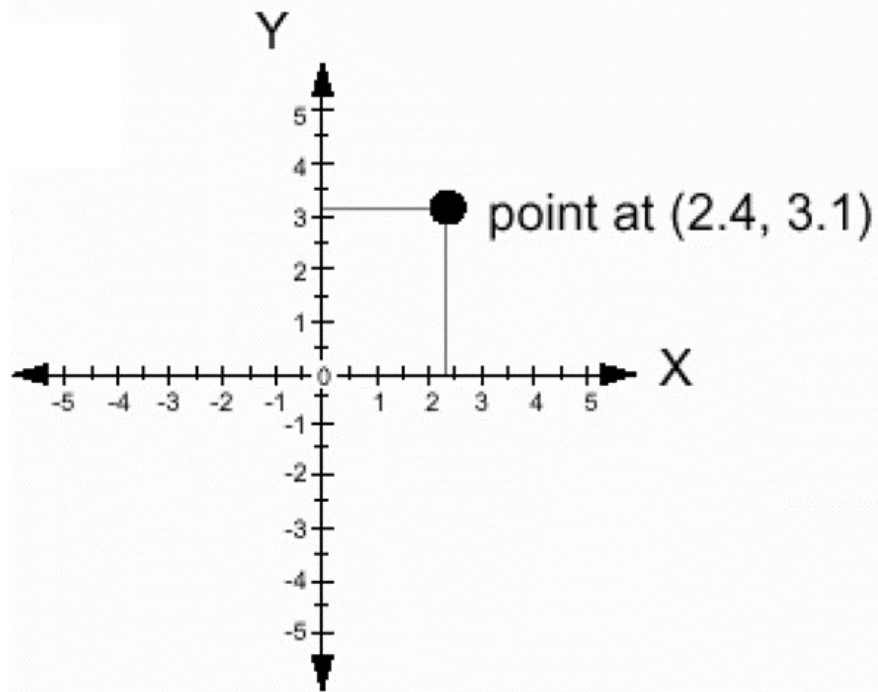




## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Καρτεσιανές συντεταγμένες





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ *Τριγωνομετρικές συναρτήσεις*
  - ✓ *Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις γωνιών, δηλαδή συναρτήσεις των οποίων το όρισμα είναι γωνία.*
  - ✓ *Πολλές φορές το όρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν είναι άμεσα αντιληπτό ως γωνία, οπότε ονομάζεται (φάση).*
  - ✓ *Είναι σημαντικές στη μελέτη τριγώνων και την μοντελοποίηση περιοδικών φαινομένων, μεταξύ άλλων.*
  - ✓ *Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται συνήθως ως λόγος των δυο πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου που περιέχει τη δεδομένη γωνία και μπορούν ισοδύναμα να οριστούν ως το μήκος διαφόρων ευθύγραμμων τμημάτων σε ένα μοναδιαίο κύκλο.*
  - ✓ *Χρησιμοποιώντας τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, μπορούν να οριστούν οι τρεις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, **η εφαπτομένη, το ημίτονο και το συνημίτονο**. Επιπλέον μπορεί να οριστεί και η συνάρτηση **συνεφαπτομένη**. Αυτές οι συναρτήσεις ορίζονται ως προς μια οξεία γωνία  $\theta$  του τριγώνου. Η  $\theta$  συνήθως μετριέται σε ακτίνια ή μοίρες.*



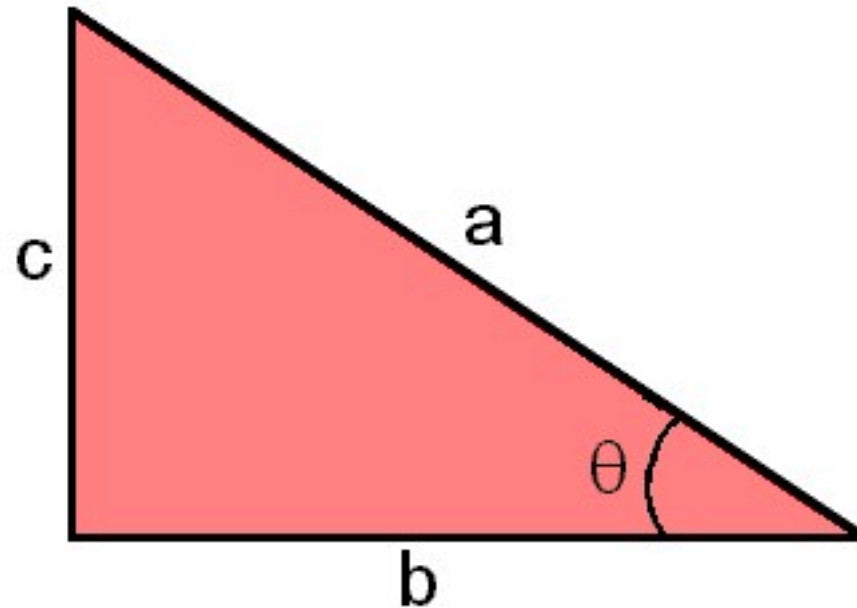


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
  - ✓ **Εφαπτομένη** της γωνίας  $\theta$  του τριγώνου το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς διά την προσκείμενη κάθετη πλευρά ( $\tan\theta$ ).
  - ✓ **Ημίτονο** της γωνίας  $\theta$  του τριγώνου το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς διά την υποτείνουσα ( $\sin\theta$ ).
  - ✓ **Συνημίτονο** της γωνίας  $\theta$  του τριγώνου το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς διά την υποτείνουσα ( $\cos\theta$ ).
  - ✓ **Συνεφαπτομένη** της γωνίας  $\theta$  του τριγώνου το πηλίκο της προσκείμενης πλευράς δια την απέναντι πλευρά ( $\cot\theta$ ).
  - ✓ Επιπλέον ορίζονται και οι εξής τριγωνομετρικοί αριθμοί:
    - ✓ **Τέμνουσα**: Το κλάσμα  $1/\cos\theta$ .
    - ✓ **Συντέμνουσα**: Το κλάσμα  $1/\sin\theta$ .
  - ✓ Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο προκύπτει η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα ότι  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ .





## Γραφικά Υπολογιστών

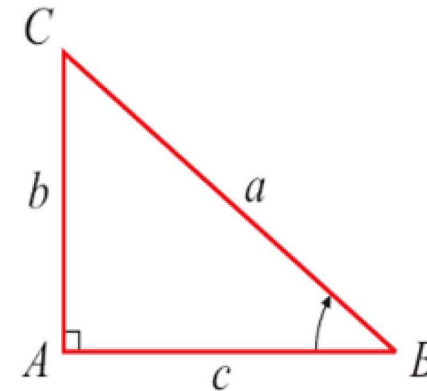
### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Το τρίγωνο  $ABC$  έχει ορθή γωνία ( $90^\circ$ ) στο  $A$ . Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $B$  ορίζονται ως εξής:

Ημίτονο  $\sin B = \frac{b}{a}$

Συνημίτονο  $\cos B = \frac{c}{a}$







## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$x$ σε μοίρες	$x$ σε ακτίνια	$\sin x$	$\cos x$
$0^\circ$	0	0	1
$15^\circ$	$\pi/12$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
$30^\circ$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$45^\circ$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$60^\circ$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$75^\circ$	$5\pi/12$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$
$90^\circ$	$\pi/2$	1	0



## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
  - ✓ Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι αντίστροφες συναρτήσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (με κατάλληλα περιορισμένα πεδία ορισμού) και χρησιμοποιούνται για να υπολογιστεί μια γωνία από οποιαδήποτε τριγωνομετρική αναλογία της.

Ονομασία	Συνήθης συμβολισμός	Ορισμός	Πεδίο ορισμού του $x$ για πραγματικό αποτέλεσμα	Σύνολο τιμών των συνηθών κύριων τιμών (σε ακτίνια)	Σύνολο τιμών των συνηθών κύριων τιμών (σε μοίρες)
arcsine	$y = \arcsin(x)$	$x = \sin(y)$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$	$-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$
arccosine	$y = \arccos(x)$	$x = \cos(y)$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	$0^\circ \leq y \leq 180^\circ$
arctangent	$y = \arctan(x)$	$x = \tan(y)$	όλοι οι πραγματικοί αριθμοί	$-\pi/2 < y < \pi/2$	$-90^\circ < y < 90^\circ$
arccotangent	$y = \operatorname{arccot}(x)$	$x = \cot(y)$	όλοι οι πραγματικοί αριθμοί	$0 < y < \pi$	$0^\circ < y < 180^\circ$
arcsecant	$y = \operatorname{arcsec}(x)$	$x = \sec(y)$	$x \leq -1$ ή $1 \leq x$	$0 \leq y < \pi/2$ ή $\pi/2 < y \leq \pi$	$0^\circ \leq y < 90^\circ$ ή $90^\circ < y \leq 180^\circ$
arccosecant	$y = \operatorname{arccsc}(x)$	$x = \csc(y)$	$x \leq -1$ ή $1 \leq x$	$-\pi/2 \leq y < 0$ ή $0 < y \leq \pi/2$	$-90^\circ \leq y < 0^\circ$ ή $0^\circ < y \leq 90^\circ$



## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Σφαιρικές συντεταγμένες
    - ✓ Στο σύστημα αυτό, η θέση ενός σημείου  $p$  ορίζεται με βάση την απόσταση  $r$  από το κέντρο των αξόνων και δύο γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ .
    - ✓ Η απόσταση  $r$  πρακτικά ορίζει μία σφαίρα, στην επιφάνεια της οποίας βρίσκεται το σημείο και οι γωνίες προσδιορίζουν μοναδικά το σημείο πάνω στη σφαίρα.
    - ✓ Η γωνία  $\vartheta$  (αζιμούθιο) είναι η γωνία από τον άξονα  $x$  μέχρι την προβολή του διανύσματος  $Op$  πάνω στο οριζόντιο επίπεδο  $xy$  ( $-180^\circ \leq \vartheta < 180^\circ$ ), και η γωνία  $\varphi$  (ανύψωση) είναι η γωνία από το οριζόντιο επίπεδο  $xy$  μέχρι το διάνυσμα  $Op$  ( $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ).



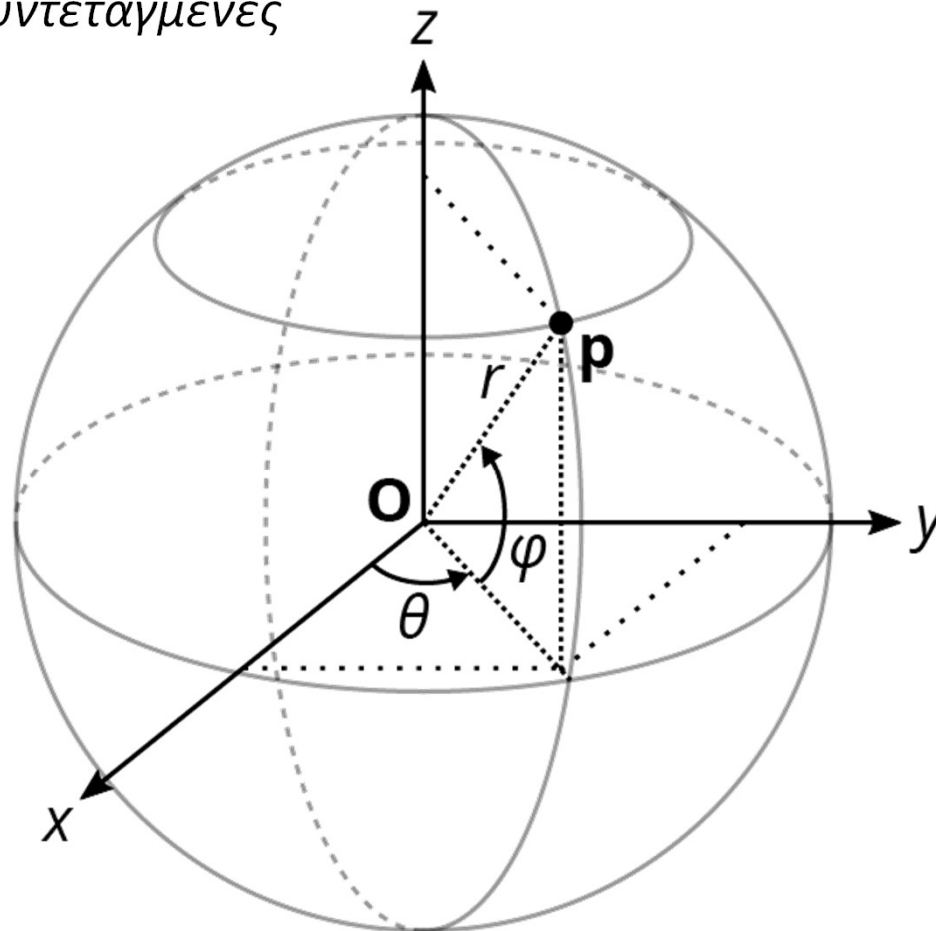


ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Σφαιρικές συντεταγμένες

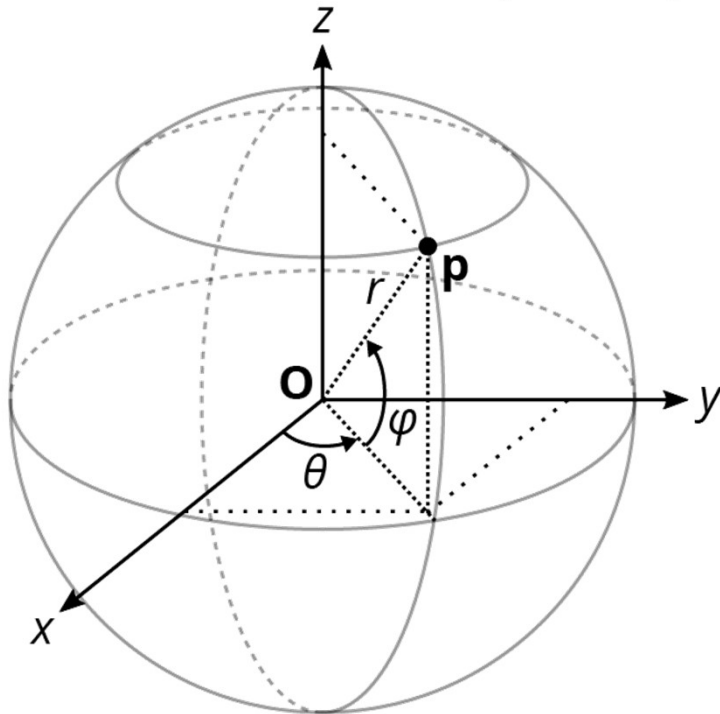




## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Σφαιρικές συντεταγμένες
    - ✓ Με αυτή την επιλογή γωνιών, η μετατροπή από τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  του σημείου σε σφαιρικές γίνεται με τους ακόλουθους τύπους:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

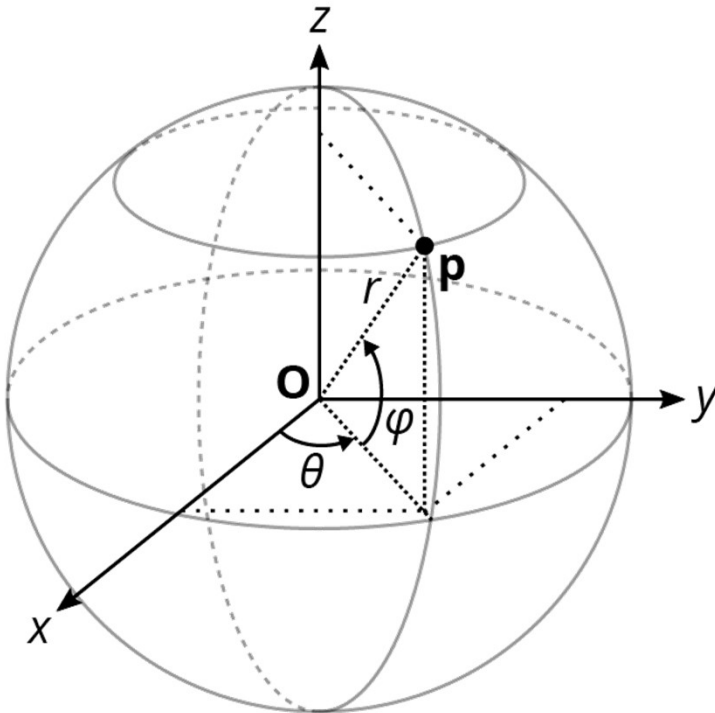




## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

- ✓ Συστήματα συντεταγμένων
  - ✓ Σφαιρικές συντεταγμένες
    - ✓ Η αντίστροφη μετατροπή, από σφαιρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, γίνεται με τους ακόλουθους τύπους:



$$x = r \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = r \sin \varphi$$



## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

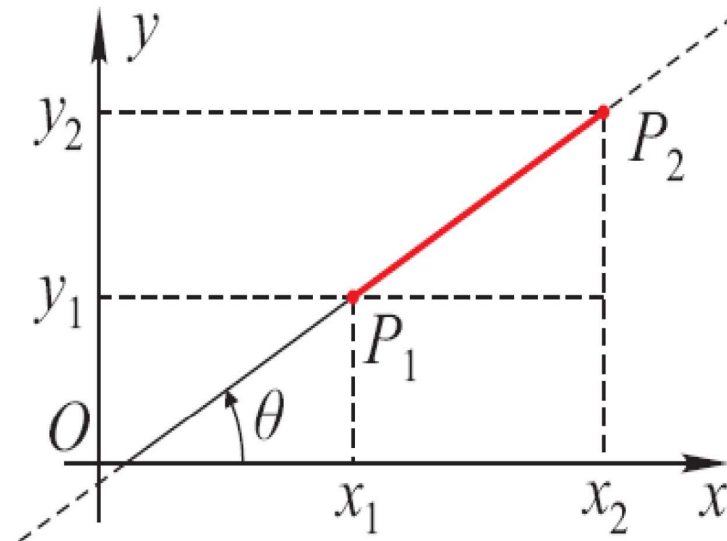
✓ Απόσταση 2 σημείων (2D)

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $P_1P_2$   
είναι

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$(x_1, y_1)$  = καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου  $P_1$

$(x_2, y_2)$  = καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου  $P_2$





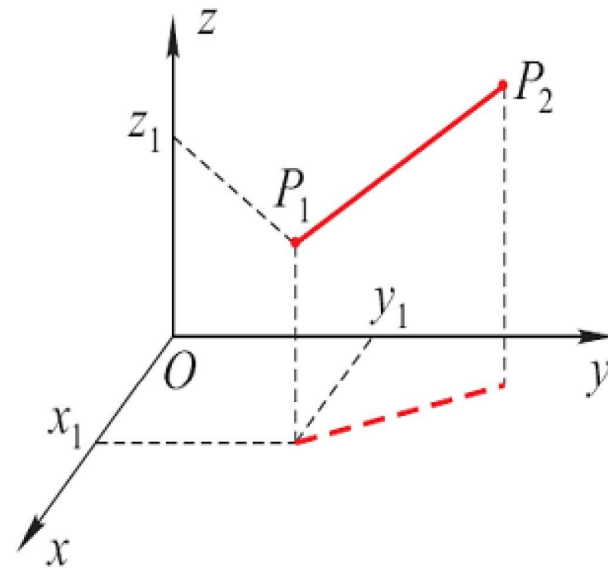
## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Απόσταση 3 σημείων (3D)

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$(x_i, y_i, z_i)$  = καρτεσιανές συντεταγμένες  
του σημείου  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).







## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Εξίσωση ευθείας

Αν η ευθεία περνάει από δύο σημεία  $P_1(x_1, y_1)$  και  $P_2(x_2, y_2)$ , έχει εξίσωση

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Η κλίση της ευθείας είναι

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

και η τεταγμένη της τομής με τον άξονα  $y$

$$b = y_1 - mx_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

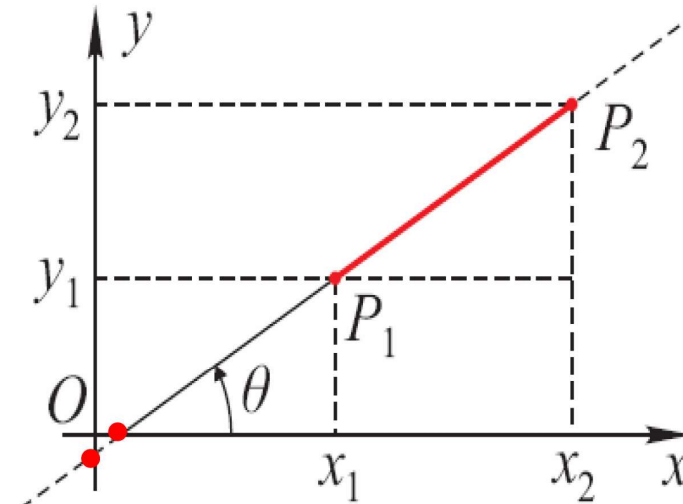
Η εξίσωση της ευθείας γράφεται επίσης

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ή  $y = mx + b$

ή  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

όπου  $a$  η τετμημένη της τομής με τον άξονα  $x$ .





ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Η εξίσωση της μορφής  $f(x, y) = Ax + By + \Gamma$  (πολυώνυμο πρώτου βαθμού) παριστάνει γενικώς μία ευθεία στο επίπεδο  $xy$ .

*Μια ευθεία μπορεί να δοθεί σε παραμετρική μορφή (2D) με δύο εξισώσεις  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , όπου  $t$  κάποια παράμετρος.*

Αν η  $f(x, y)$  είναι δεύτερου βαθμού πολυώνυμο, έχουμε κωνική τομή (κύκλο, έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή).





## Γραφικά Υπολογιστών

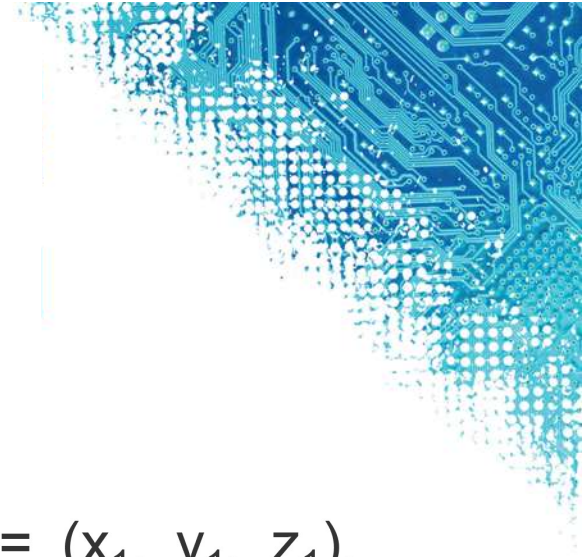
### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Παραμετρική εξίσωσης ευθείας

- Έστω τα δύο σημεία  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  &  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , μπορούμε να εκφράσουμε την ευθεία που τα ενώνει ως εξής:

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

όπου  $-\infty < t < \infty$





ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

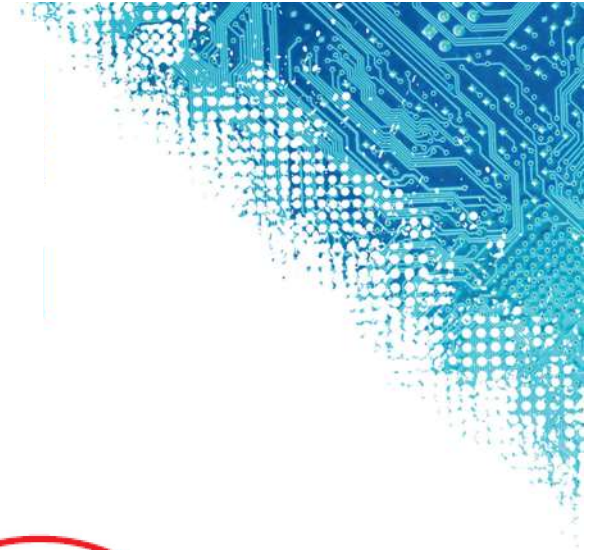
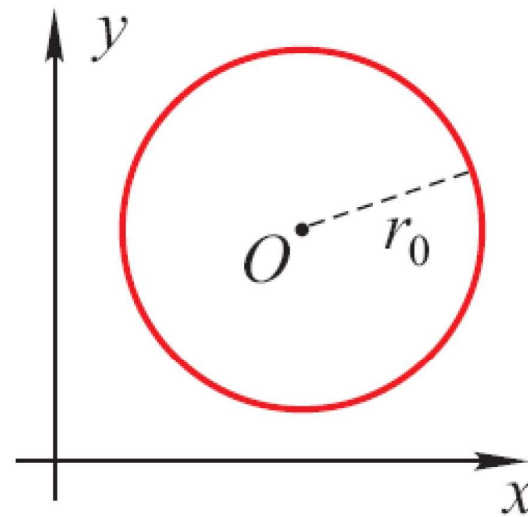
### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Κύκλος

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$(x_0, y_0)$  = καρτεσιανές συντεταγμένες κέντρου

$R$  = ακτίνα του κύκλου





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Έλλειψη

Η έλλειψη με μεγάλο άξονα  $2a$  και μικρό άξονα  $2b$ , παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων  $Ox$  και  $Oy$  αντίστοιχα, έχει εξίσωση

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

όπου  $(x_0, y_0)$  οι συντεταγμένες του κέντρου  $K$  της έλλειψης.

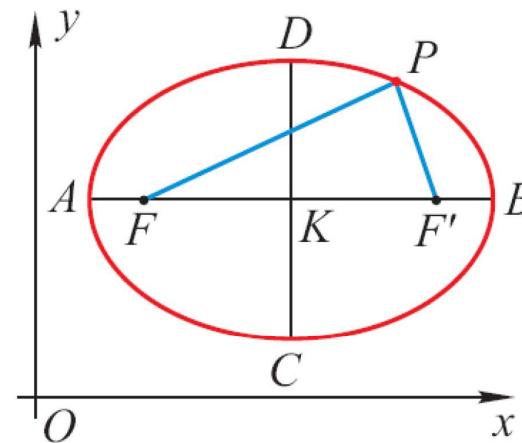
$$AB = 2a$$

$$CD = 2b$$

$$KF = KF' = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$PF + PF' = 2a \quad (P \text{ τυχόν σημείο της έλλειψης})$$

$$\varepsilon = \text{εκκεντρότητα} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ *Εξίσωση σφαίρας*

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα στον τρισδιάστατο χώρο είναι:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

με βάση αυτό μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση της σφαίρας είναι:

- στο  $(x_c, y_c, z_c)$ :  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$

- στο  $(0,0,0)$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ **Διανύσματα**

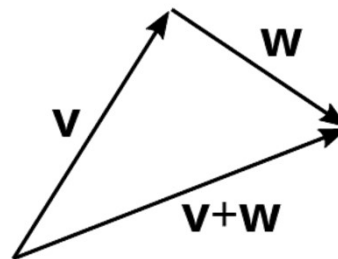
- ✓ Το μέτρο ή μήκος ενός διανύσματος  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  συμβολίζεται με  $|\mathbf{v}|$  και δίνεται από τη σχέση:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- ✓ Η πρόσθεση διανυσμάτων (ίδιας διάστασης) γίνεται προσθέτοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες τους:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z) = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$

- ✓ Γεωμετρικά, η πρόσθεση διανυσμάτων υπολογίζεται εφαρμόζοντας το  $\mathbf{w}$  στο τέλος του  $\mathbf{v}$  και σχηματίζοντας το διάνυσμα από την αρχή του  $\mathbf{v}$  μέχρι το τέλος του  $\mathbf{w}$





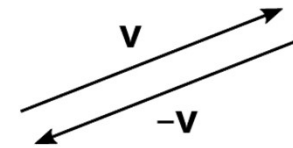
## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Διανύσματα

- ✓ Το αντίθετο ενός διανύσματος  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  είναι αυτό που έχει τις αντίθετες συντεταγμένες και έχει ίδιο μέτρο και διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά από το  $\mathbf{v}$ :

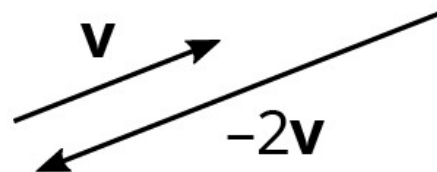
$$-\mathbf{v} = (-v_x, -v_y, -v_z)$$



- ✓ Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό γίνεται επίσης κατά στοιχείο:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z)$$

- ✓ Γεωμετρικά, το  $\lambda \mathbf{v}$  έχει ίδια διεύθυνση με το  $\mathbf{v}$ , μέτρο ίσο με  $\lambda$  φορές το μέτρο αυτού ( $|\lambda \mathbf{v}| = \lambda |\mathbf{v}|$ ) και φορά που εξαρτάται από το πρόσημο του  $\lambda$ : ίδια αν  $\lambda > 0$  και αντίθετη αν  $\lambda < 0$







## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Διανύσματα

- ✓ Ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με 1 καλείται **μοναδιαίο** και συχνά για έμφαση σημειώνεται με ένα «καπελάκι», π.χ.  $\hat{\mathbf{V}}$ .
- ✓ Συχνά χρειάζεται να παράξουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα με φορά ίδια με αυτή ενός δεδομένου διανύσματος. Αυτό γίνεται εύκολα αν διαιρέσουμε κάθε συντεταγμένη του διανύσματος με το μέτρο του:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \left( \frac{v_x}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_y}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_z}{|\mathbf{v}|} \right)$$

- ✓ Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  συμβολίζεται  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ , είναι αριθμός (και όχι διάνυσμα) και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ *Διανύσματα*

- ✓ *Από τη σχέση αυτή το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό, δηλαδή  $v \cdot w = w \cdot v$  και μπορεί να γραφεί επίσης ως:*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \theta$$

*όπου  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$ .*

- ✓ *Η σχέση αυτή είναι πολύ χρήσιμη σε εφαρμογές, καθώς συχνά γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο και κατόπιν μπορούμε να βρούμε τη γωνία μεταξύ τους:*

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}$$

- ✓ *Επίσης μπορούμε να ελέγξουμε αν τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα: τότε  $\theta = 90^\circ$  με  $\cos \theta = 0$ , άρα  $v \cdot w = 0$*

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$





## Γραφικά Υπολογιστών

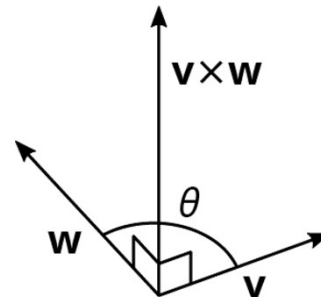
### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Διανύσματα

- ✓ Το **εξωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  ορίζεται μόνο για διανύσματα διάστασης 3 και συμβολίζεται  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . Είναι διάνυσμα με μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta$$

όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ των  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ), διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  αν εφαρμοστούν στο ίδιο σημείο και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού: αν ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει κατά τη φορά του  $\mathbf{v}$  και ο δείκτης κατά τη φορά του  $\mathbf{w}$ , ο μέσος θα δείχνει κατά τη φορά του εξωτερικού τους γινομένου  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Διανύσματα

- ✓ Το **εξωτερικό γινόμενο** μπορεί να υπολογιστεί, συναρτήσει των συντεταγμένων των  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$ , από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x) \\ &= (v_y w_z - v_z w_y) \hat{\mathbf{i}} + (v_z w_x - v_x w_z) \hat{\mathbf{j}} + (v_x w_y - v_y w_x) \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

(όπου  $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων) ή, σε μορφή ορίζουσας

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να συναγάγουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό αλλά ισχύει  $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  δηλαδή το εξωτερικό γινόμενο αλλάζει φορά (αλλά διατηρεί διεύθυνση και μέτρο) αν αλλάξουμε τη σειρά των διανυσμάτων.





ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Διανύσματα

✓ Ισχύει ότι δύο παράλληλα διανύσματα έχουν εξωτερικό γινόμενο  $\vec{0}$ , δηλαδή:

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \vec{0}$$

(όπου  $\vec{0}$  το μηδενικό διάνυσμα), καθώς η γωνία που σχηματίζουν είναι  $\vartheta = 0^\circ$  ή  $\vartheta = 180^\circ$  με  $\sin \vartheta = 0$  και στις δύο περιπτώσεις.





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

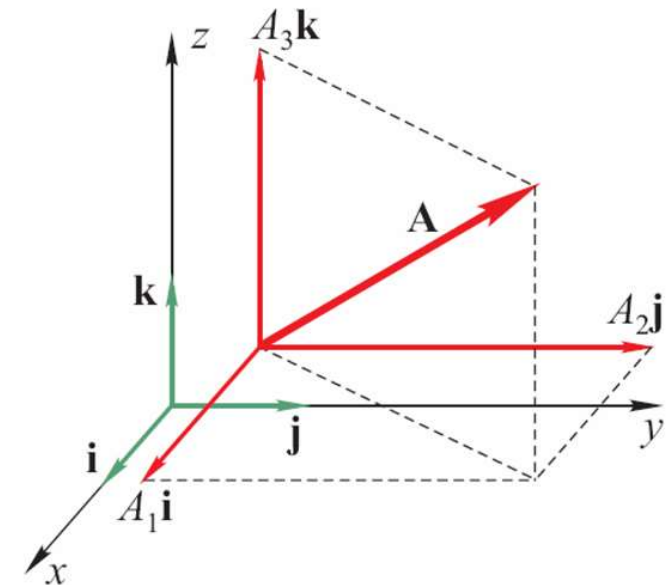
#### ✓ Διανυσματική ανάλυση

Μια ποσότητα που εκφράζεται από ένα μόνο πραγματικό αριθμό καλείται *βαθμωτό μέγεθος*.

Μια ποσότητα που εκφράζεται από περισσότερους από έναν πραγματικούς αριθμούς καλείται *διάνυσμα* ή *διανυσματικό μέγεθος* (ακριβέστερα ένα διάνυσμα ακολουθεί ορισμένους κανόνες μετασχηματισμού από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο).

Ένα διάνυσμα παριστάνεται με ένα βέλος. *Μέτρο* του διανύσματος καλείται το μήκος του βέλους και *φορά* η κατεύθυνση του βέλους. *Μοναδιαίο* καλείται ένα διάνυσμα που έχει μέτρο 1.

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των αξόνων  $x$ ,  $y$ ,  $z$  συμβολίζονται με  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ . Οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{A}$  είναι  $A_1\mathbf{i}$ ,  $A_2\mathbf{j}$ ,  $A_3\mathbf{k}$  και γράφουμε  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ .





## Γραφικά Υπολογιστών

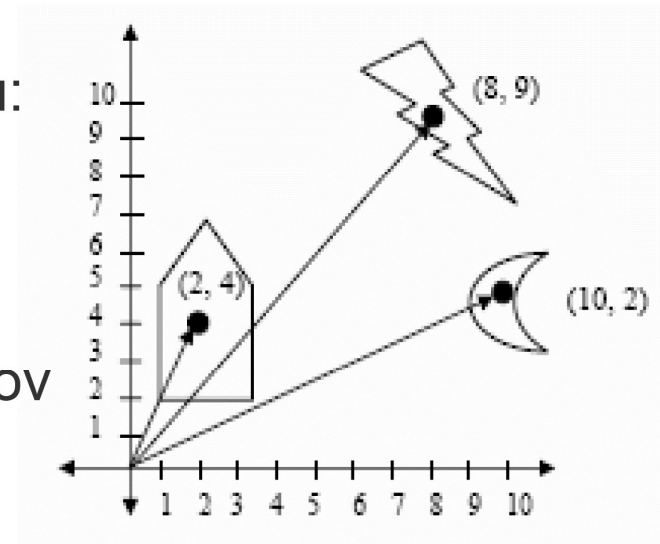
### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Διανύσματα αντικειμένου

● Ένα διάνυσμα αντικειμένου δηλώνει:

- την θέση
- τον προσανατολισμό και
- την απόστασή του

ως προς την αρχή των αξόνων στον χώρο





## Γραφικά Υπολογιστών

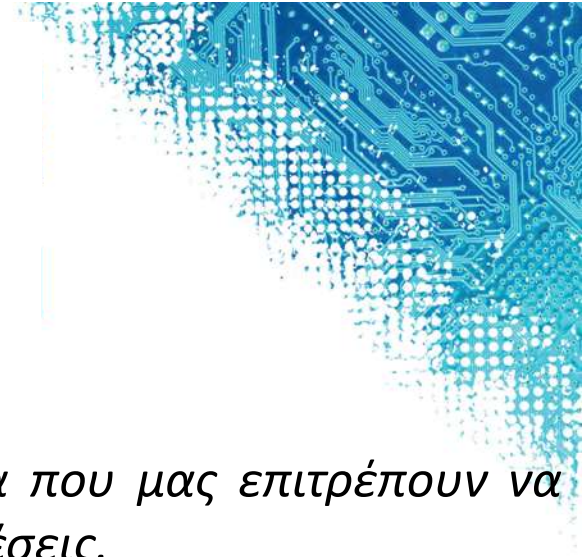
### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Πίνακες

- ✓ Οι πίνακες είναι εύχρηστα μαθηματικά εργαλεία που μας επιτρέπουν να εκφράσουμε ευσύνοπτα, σύνθετες αλγεβρικές σχέσεις.
- ✓ Ένας πίνακας δεν είναι παρά μία ορθογώνια διάταξη αριθμών, σε γραμμές και στήλες.
- ✓ Το πλήθος των γραμμών και το πλήθος των στηλών ενός πίνακα καλούνται διαστάσεις του πίνακα.
- ✓ Ένας πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών (γράφεται  $2 \times 3$ ) είναι ο:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

- ✓ Στα Γραφικά οι πίνακες που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως τετραγωνικοί (δηλαδή έχουν ίσο αριθμό γραμμών και στηλών),  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  και  $4 \times 4$ .







## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Πίνακες

- Πίνακας είναι ένα σύνολο τιμών σε M σειρές & N στήλες

– πίνακας 3 επί 6

– στοιχείο 2,3 είναι το 7

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ένα διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί σαν 1 x M πίνακας

$$v = (x \ y \ z)$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Πίνακες

- Ταυτωτικός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

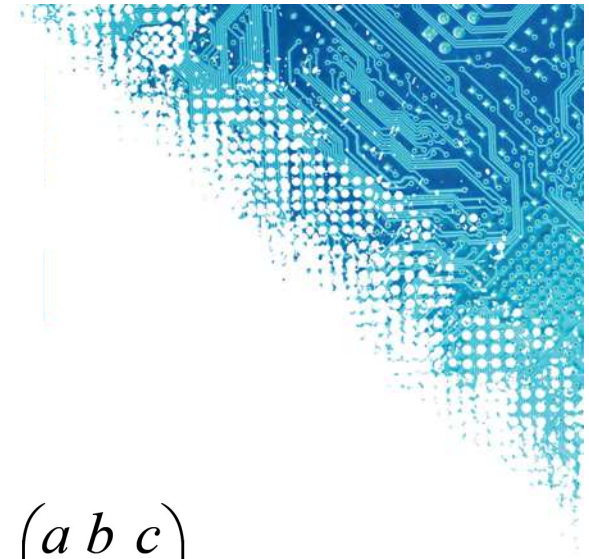
- Διαγώνιος

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- Συμμετρικός

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- οι διαγώνιοι πίνακες είναι συμμετρικοί
- οι ταυτοτικοί πίνακες είναι διαγώνιοι
- αντίστροφος:  
Αν  $A \times B = I$  τότε  $A = B^{-1}$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

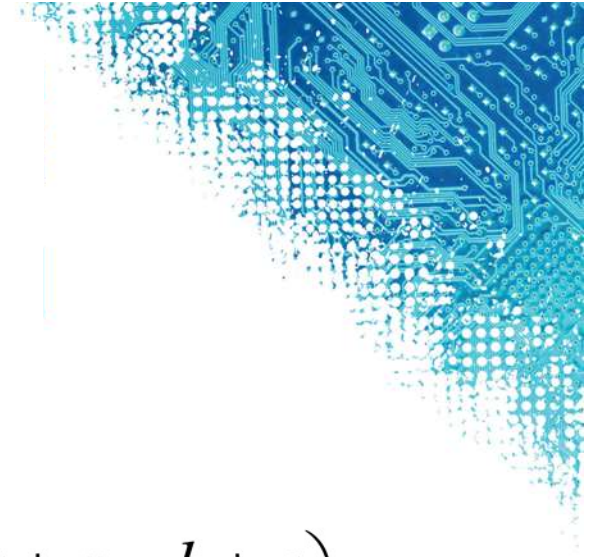
✓ Πίνακες

- Πρόσθεση

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

- Ανάστροφος

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Πίνακες

- ✓ Η πρόσθεση δύο πινάκων ορίζεται μόνο όταν έχουν ίδιες διαστάσεις, προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία τους: αν οι **A** και **B** είναι πίνακες  $m \times n$ , τότε το άθροισμά τους είναι ένας πίνακας **C**, διαστάσεων  $m \times n$  επίσης, όπου:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{με} \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ .

- ✓ Ο πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό γίνεται επίσης κατά στοιχείο. Πολλαπλασιάζοντας έναν πίνακα **A** διαστάσεων  $m \times n$  με έναν αριθμό **k** λαμβάνουμε έναν πίνακα **D** επίσης διαστάσεων  $m \times n$ , όπου:

$$\mathbf{D} = k \mathbf{A} \quad \text{με} \quad d_{i,j} = k a_{i,j}$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Πίνακες

- ✓ Ο πολλαπλασιασμός πινάκων γενικά δεν είναι αντιμεταθετικός, δηλαδή στη γενική περίπτωση  $AB \neq BA$  (η σχέση έχει νόημα μόνο μεταξύ τετραγωνικών πινάκων, ώστε να ταιριάζουν οι διαστάσεις τους). Ασφαλώς υπάρχουν περιπτώσεις όπου αυτά τα δύο γινόμενα είναι ίσα.
- ✓ Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι όμως προσεταιριστικός,  $(AB)C = A(BC)$ , δηλαδή σε μία ακολουθία διαδοχικών πολλαπλασιασμών μπορούμε να υπολογίσουμε τα γινόμενα ανά δύο με όποια σειρά θέλουμε (αρκεί, βέβαια, να μην αντιμεταθέσουμε πίνακες).
- ✓ Ο μοναδιαίος πίνακας  $I$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει στοιχεία μονάδα (1) στη διαγώνιο και μηδέν (0) παντού αλλού. Για παράδειγμα σε διάσταση 3 είναι ο πίνακας:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Πίνακες

Σχηματικά, το στοιχείο του γινομένου  $AB$  στη θέση  $(i,j)$  προκύπτει από τη γραμμή  $i$  του  $A$  και τη στήλη  $j$  του  $B$  όπως δείχνει το σχήμα

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{im}} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \boxed{b_{1j}} \\ \dots \\ \boxed{b_{2j}} \\ \dots \\ \dots \\ \boxed{b_{mj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^3 a_{1r}b_{r1} & \sum_{r=1}^3 a_{1r}b_{r2} & \sum_{r=1}^3 a_{1r}b_{r3} \\ \sum_{r=1}^3 a_{2r}b_{r1} & \sum_{r=1}^3 a_{2r}b_{r2} & \sum_{r=1}^3 a_{2r}b_{r3} \end{pmatrix}$$



## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

#### ✓ Πίνακες

- ✓ Ο μοναδιαίος πίνακας είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων, δηλαδή αν  $A$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τότε:  $AI = IA = A$
- ✓ Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  συμβολίζεται με  $A^{-1}$  και είναι ένας πίνακας των ίδιων διαστάσεων για τον οποίο ισχύει:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- ✓ Ο αντίστροφος ενός πίνακα δεν υπάρχει πάντα. Αν υπάρχει, ο πίνακας  $A$  λέγεται αντιστρέψιμος.
- ✓ Ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  συμβολίζεται με  $\det(A)$  ή  $|A|$  και είναι ένας αριθμός που προκύπτει με συγκεκριμένο τύπο, από τα στοιχεία του. Για πίνακα διάστασης 2 είναι:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

✓ Πίνακες

✓ Για πίνακα διάστασης 3 είναι:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$
$$= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1})$$

- ✓ Η πρώτη από τις παραπάνω ισότητες γενικεύεται και για πίνακες μεγαλύτερης διάστασης: για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής του με την ορίζουσα του υποπίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε την αντίστοιχη γραμμή και στήλη, και εναλλάξ προσθέτουμε και αφαιρούμε αυτά τα γινόμενα.
- ✓ Για πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων θα χρειαστεί να υπολογίσουμε διαδοχικά όλες τις επιμέρους υποορίζουσες όλων των μικρότερων διαστάσεων.







## Γραφικά Υπολογιστών

### Μαθηματικό υπόβαθρο

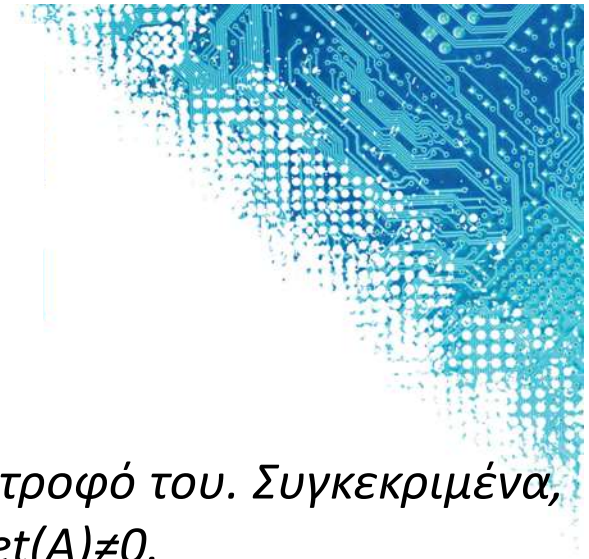
#### ✓ Πίνακες

- ✓ Η ορίζουσα ενός πίνακα  $A$  συνδέεται με τον αντίστροφό του. Συγκεκριμένα, ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν  $\det(A) \neq 0$ .
- ✓ Ο ανάστροφος ενός πίνακα  $A$  διαστάσεων  $m \times n$  συμβολίζεται με  $A^T$  και είναι ο πίνακας διαστάσεων  $n \times m$  που έχει ως γραμμές τις στήλες του  $A$ , π.χ. για έναν πίνακα διάστασης 2 θα είναι:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

- ✓ Σημειώνουμε εδώ ότι στα επόμενα θα συμβολίζουμε τα διανύσματα ως πίνακες-στήλη, για παράδειγμα ένα τριδιάστατο διάνυσμα  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  θα γράφεται ως:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$$





## Γραφικά Υπολογιστών

### Βιβλιογραφία

- ✓ Σ. Καλαφατούδη, "Γραφικά με Υπολογιστή," Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 1991.
- ✓ Α. Στυλιάδη, "Γραφικά με Η/Υ," Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
- ✓ Θ. Θεοχάρης, Α. Μπέμ, "Γραφικά: Αρχές και Αλγόριθμοι," Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.
- ✓ Γ. Παρασχάκη, Μ. Παπαδοπούλου, Π. Πατιάς, "Σχεδίαση με Η/Υ," Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
- ✓ J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes, R. L. Phillips, "Introduction to Computer Graphics," Addison Wesley, 1994.
- ✓ Κ. Μουστάκας Ι. Παλιόκας Α. Τσακίρης Δ. Τζοβάρας, (2015), "Γραφικά και Εικονική Πραγματικότητα", ISBN: 978-960-603-255-4, [www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)
- ✓ Λαζαρίνης, Φ, (2015), "Πολυμέσα", ISBN: 978-960-603-141-0, [www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)
- ✓ Γεώργιος Λέπουρας, Αγγελική Αντωνίου, Νίκος Πλαιής, Δημήτρης Χαρίχος, (2015), "Ανάπτυξη συστημάτων εικονικής πραγματικότητας", ISBN: 978-960-603-382-7, [www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)